

12 CHUYÊN ĐỀ
BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI
8 – 9
Môn: Giải toán trên máy tính cầm tay
(Lưu hành nội bộ)
Chỉnh sửa và in năm 2020

12 CHUYÊN ĐỀ
BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI
GIẢI TOÁN TRÊN MTCT
Casio, Vinacal, Flexio

LỜI NÓI ĐẦU

Bồi dưỡng, phát triển trí tuệ và năng lực hoạt động sáng tạo của học sinh là nhiệm vụ trọng tâm của mỗi nhà trường. Sử dụng máy tính cầm tay (MTCT) để giải toán là một trong những hoạt động phát triển trí tuệ và năng lực sáng tạo của học sinh. Với những kỹ năng đơn giản về sử dụng MTCT để tính toán thông thường như tính giá trị của biểu thức số, tìm nghiệm của phương trình, bất phương trình, khai phương, tìm tỉ số lượng giác của một góc... học sinh còn được rèn luyện lên một mức độ cao hơn đó là ***rèn tư duy thuật toán*** - một thao tác tư duy cực kỳ cần thiết cho lập trình viên máy tính sau này - thông qua các dạng toán đa dạng, phong phú với nhiều cách giải linh hoạt sẽ giúp các em học sinh bước đầu làm quen với “Thuật toán”, xử lý bài toán theo một cách khác so với cách giải truyền thống từ đó giúp học sinh nhanh chóng đi đến đáp số của một bài toán phức tạp.

Hiện nay, với sự phát triển như vũ bão của khoa học - kỹ thuật nhất là các ngành thuộc lĩnh vực công nghệ thông tin trong đó MTCT là một thành quả của những tiến bộ đó. MTCT đã được sử dụng rộng rãi trong các nhà trường với tư cách là một công cụ hỗ trợ việc giảng dạy, học tập hay cả việc đổi mới phương pháp dạy học theo hướng hiện đại như hiện nay một cách có hiệu quả.

Trong những năm gần đây, các cơ quan quản lý giáo dục cũng như các tổ chức rất chú trọng việc tổ chức các cuộc thi giải toán trên MTCT. Từ năm 2001, BGD&ĐT bắt đầu tổ chức cuộc thi “***Giải toán trên MTCT***” cho học sinh THCS từ cấp trường đến cấp khu vực; báo ***Toán tuổi thơ 2*** tổ chức thi giải toán bằng MTCT qua thư cho học sinh THCS, báo ***Toán học & Tuổi trẻ*** tổ chức cuộc thi tương tự cho cả học sinh THCS và THPT. Nhằm góp phần phát huy trí lực của học sinh và tận dụng những tính năng ưu việt của MTCT để hỗ trợ học tốt môn Toán nói riêng và các môn học khác như Lý, Hoá, Sinh, Địa ...

Từ những lý do đó, “**12 chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi giải toán trên máy tính cầm tay**” ra đời. Quyển sách được biên soạn dựa trên nhiều năm kinh nghiệm thực tiễn trong việc bồi dưỡng học sinh giỏi các cấp của giáo viên; là sự tổng hợp rất rộng từ nhiều nguồn tài liệu của nhiều tác giả cũng như trên Internet... Hy vọng tài liệu này sẽ thực sự hữu dụng đối với các thầy cô phụ trách bồi dưỡng và các em học sinh trực tiếp tham gia thi học sinh giỏi các cấp cũng như giúp ích cho các em học sinh THCS, THPT tính toán tốt hơn trong bộ môn Toán với sự trợ giúp từ MTCT.

PHỤ LỤC

STT	Nội dung	Trang
1	CHUYÊN ĐỀ 1: .	5 – 11
2	CHUYÊN ĐỀ 2:	12 – 19
3	CHUYÊN ĐỀ 3:	20 – 36
4	CHUYÊN ĐỀ 4:	37 – 46
5	CHUYÊN ĐỀ 5:	47 – 61
6	CHUYÊN ĐỀ 6:	62 – 89
7	CHUYÊN ĐỀ 7:	90 – 98
8	CHUYÊN ĐỀ 8:	99 – 102
9	CHUYÊN ĐỀ 9:	103 – 113
10	CHUYÊN ĐỀ 10:	114 – 122
11	CHUYÊN ĐỀ 11:	123 – 136
12	CHUYÊN ĐỀ 12: Đề thi tham khảo	396 – 429

CHUYÊN ĐỀ 1

MỘT SỐ CHỨC NĂNG – CÔNG THỨC – THUẬT TOÁN THÔNG DỤNG

I. MỘT SỐ CÂU LỆNH – CHỨC NĂNG:

1) Câu lệnh: **[SHIFT] [9] [3] [=] [=]**

Ý nghĩa: Luôn thực hiện thủ tục này khi bắt đầu tính toán hoặc chuyển sang chương trình tính toán khác (giống như ta lấy giấy trắng để viết nối tiếp).

Lưu ý rằng thao tác này cũng xóa đi tất cả các dữ liệu hiện thời trong bộ nhớ máy tính tay

2. Bộ nhớ cặp đôi **[Ans]** và **[PreAns]** : Đó là tính năng nhớ kết quả tính toán cuối cùng được lưu nhờ phím nhớ **[Ans]** (nhớ hiện tại) và nhớ kết quả tính toán thu được trước kết quả tính toán cuối cùng được lưu nhờ phím nhớ **[PreAns]** (nhớ ngay trước). Phím nhớ **[PreAns]** chỉ sử dụng trong chương trình COMP. Nội dung nhớ của phím **[PreAns]** sẽ được xóa bất cứ khi nào máy nhập vào chương trình khác từ COMP.

Ví dụ: Cho dãy số sau: 1; 1; 2; 3; 5; 8. Tính giá trị số hạng thứ 7, thứ 8.

Giải

Ấn **1=** (Lúc này kết quả lưu vào bộ nhớ **[Ans]**)

Ấn tiếp **1=** (Lúc 1 này lưu vào **[Ans]** còn 1 kết quả trên lưu vào bộ nhớ **[PreAns]**)

Ghi vào máy: **[Ans] [+] [ALPHA] [Ans] ([PreAns])**

Ấn **[=] [=] [=] [=] [=]** được số hạng thứ 7 là 13

Ấn tiếp **[=]** được số hạng thứ 8 là 21

3. **Biến nhớ** : Có 9 biến nhớ (A, B, C, D, E, F, M, X và Y) có thể dùng để gán số liệu, hằng số, kết quả và các giá trị khác. Đây là các phím có chữ màu đỏ, muốn gọi nó ta phải dùng phím **[ALPHA]** và các phím nối trên các phím này.

Ví dụ: muốn gán 15 vào A, ta ấn 15 = **[SHIFT] [STO] [A]**

Muốn xóa giá trị nhớ của A, ta ấn : 0 **[SHIFT] [STO] [A]**

(Với máy 580 chỉ bấm **[STO] [A]**)

Muốn xóa tất cả các biến nhớ thì ta ấn **[SHIFT] [9] [3] [=] [=]**

Ví dụ 1: Tính $192 : 3; 192 : 2$

Ấn máy 192 **[SHIFT] [STO] [A] $\div$ 3 [=]**

[ALPHA] [A] $\div$ 2 [=]

4. **Phím [CALC]** : Phím có chức năng giúp ta lưu biểu thức và tính ngay giá trị của nó theo mỗi giá trị gán cho biến (chữ). Giá trị của biến được nhập theo yêu cầu tính toán mà gán cho mỗi lần nhập.

Ví dụ: Tính $y = x^2 + 3x - 12$ với $x = 7, x = 8$

Nhập biểu thức: Dùng phím **[ALPHA]** nhập đa thức sau vào máy : $x^2 + 3x - 12$

ấn tiếp **[CALC] X?** ấn 7= 58 (kết quả $y = 58$)

ấn tiếp **[=] X?** ấn 8= 876 (kết quả $y = 76$)

5) **Tính giá trị các biểu thức liên tiếp** :

Ví dụ: Dùng phím **[ALPHA]** nhập vào máy tính biểu thức : $A=A+1 : B=A+2 : C=B+C$

Lưu ý : Dấu ":" là dấu màu đỏ nằm dưới phím **[$\int$]** và dấu = cũng là dấu màu đỏ nằm dưới phím rta phải nhập nó bằng phím **[ALPHA]**

Bấm **CALC** máy hỏi: A? Ta nhập A = 0, máy hỏi tiếp C? ta nhập C=0 và bấm liên tiếp các dấu = để thực hiện tính các biểu thức trên. Khi đó máy sẽ thực hiện tính như sau :

Lần lặp 1:

-Máy thay A = 0 vào để tính biểu thức A+1 và gán giá trị đó vào A.

Ta được $A=A+1 = 1$

-Đến biểu thức $B=A+2$, máy thay giá trị A ở trên để tính rồi gán kết quả vào B.

Ta được: $B=A+2 = 3$

-Chuyển qua biểu thức $C=B+C$, máy thay B ở bước trên vào để tính

Ta được: $C=B+C = 3$

Lần lặp 2:

-Máy tiếp tục hỏi: A? 1 và C? 3. Với giá trị của A là 1 và C là 3 được nhớ từ lần lặp 1. Nếu vẫn sử dụng giá trị này cho lần lặp sau ta tiếp tục bấm dấu =, nếu muốn thay đổi ta có thể nhập giá trị mới cho A và C. Giả sử ta vẫn lấy giá trị cũ, tiếp tục bấm dấu = ta được :

-Máy quay lại biểu thức $A=A+1$, với giá trị A = 1, kết quả sẽ là: $A=A+1 = 2$

-Bấm tiếp dấu = máy chuyển qua tính biểu thức $B=A+2$ và ta được : $B=A+2 = 4$

-Tiếp tục bấm = ta được kết quả biểu thức tiếp theo : $C=B+C = 7$

Kết thúc lần lặp 2, cứ tiếp tục quy trình lặp như vậy cuối cùng ta tính được tổng :

$$C = 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$$

6)Lấy phần nguyên: **ALPHA** **+** $\rightarrow$ **Int** Hoặc: **ALPHA** **-** $\rightarrow$ **Intg**

VD: **Int** $\frac{7}{3} = 2$ hoặc **Intg** $\frac{7}{3} = 2$

$Int(3,5) = 3$: Cách ấn phím **ALPHA** **+** (3.5)=

$Int(-3,5) = -3$: Cách ấn phím **ALPHA** **+** (3.5)=

$Intg(3,5) = 3$: Cách ấn phím **ALPHA** **-** (3.5)=

$Intg(3,1) = 3$: Cách ấn phím **ALPHA** **-** (3.1)=

$Intg(-3,5) = -4$: Cách ấn phím **ALPHA** **-** (-3.5)=

$Intg(-3,1) = -4$: Cách ấn phím **ALPHA** **-** (-3.1)=

Trong toán học, phần nguyên của số X được kí hiệu [X]

Như vậy : $[3,5] = Int(3.5) = 3$

7)Tìm ước chung lớn nhất: GCD $\rightarrow$ Bấm phím **ALPHA** **x**

VD: **GCD** (18,12) = 6 (Dấu phẩy bấm: **SHIFT** **)**)

Trên máy Casio để tính ước chung lớn nhất của 3 số trở lên ta phải lồng hàm để tính.

VD: tính UCLN(4;6;8) ta bấm : **LCM**(**LCM**(4,6),8)

8)Tìm bội chung nhỏ nhất: LCM $\rightarrow$ Bấm phím **ALPHA** **÷**

Trên máy Casio để tính BCNN của 3 số trở lên ta phải lồng hàm để tính.

9)Phân tích 1 số ra thừa số nguyên tố: FACT $\rightarrow$ Bấm phím **SHIFT** **”””**

10)Tìm thương và số dư trong phép chia a cho b: Phím: **÷R** $\rightarrow$ Bấm **ALPHA** **□**

Thao tác; $9 \div_R 5$ trên màn hình hiện : 1, R=4 $\rightarrow$ Thương là 1 và dư là 4

–Với phép toán này thì thương sẽ được nhớ trong bộ nhớ máy

–Với số bị chia hay số chia là số Nguyên âm thì không cho kết quả là thương và dư

–Với số bị chia quá lớn sẽ không cho kết quả thương và dư

11)Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn: $\left(\square\right) \rightarrow$ Bấm ALPHA 

VD: Viết vào máy: $0.(3) = \frac{1}{3}$ trên máy tính Vinacal kí hiệu bởi phím $0.\bar{3} = \frac{1}{3}$

12)Tính tích một dãy số: $\prod_{x=\square}^{\square}(\square) \rightarrow$ Bấm phím: ALPHA 

VD: Tính tích $A = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \dots 11^2$

-Trước hết ta xây dựng công thức tổng quát cho mỗi thừa số của tích.

Mỗi thừa số của tích được tính theo công thức tổng quát: $(2X + 1)^2$ với $X = \overline{1;5}$

Từ đó ta nhập vào máy: $A = \prod_{x=\overline{1}}^{\overline{5}} \left(\overline{2X + 1} \right)^2$ để tính tích trên

13)Tính tổng một dãy số: $\sum_{x=\square}^{\square} \square \rightarrow$ Bấm phím: SHIFT 

VD: Tính tích $B = 3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots + 11^2$

Tương tự như công thức tính tích, ta có: $B = \sum_{x=\overline{1}}^{\overline{5}} \left(\overline{2X + 1} \right)^2$

14)Tính giá trị của của một hàm số: Chức năng Table: MODE 7.

Trên máy tính Casio Fx-580VNX bấm Menu 

–Máy hỏi: Start? Ta nhập 1

–Máy hỏi tiếp: End? (Kết thúc bởi số nào?) $\rightarrow$ Ta nhập 10

–Máy hỏi: Step? (Bước nhảy là bao nhiêu?) $\rightarrow$ Ta nhập: 1

–Tiếp tục bấm “=” máy bắt đầu tính toán và hiện kết quả trên 1 bảng.

–Lưu ý: Phải chọn Start, End, Step sao cho $\frac{End - Start}{Step} \leq 20$

với máy Fx-580VNX thì $\frac{End - Start}{Step} \leq 30$

VD: Cho $f(x) = 2x$. Tính $f(1), f(2), f(3) \dots f(10)$. Ta bấm như trên và nhập vào :

Start? Nhập 1

End? Nhập 10 (Ta có thể nhập tới 30 với máy 580)

Step? Nhập 1

Ta được bảng giá trị :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F(x)=2x	2	4	6	8	10	12	14	16	19	20

15)Làm tròn số:

–Quy tắc: Nếu chữ số trong phần bỏ đi lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cộng thêm 1 vào chữ số cuối cùng của số được làm tròn. Nếu chữ số đầu tiên trong phần bỏ đi nhỏ hơn 5 thì giữ nguyên số được làm tròn.

VD: Làm tròn tới 2 chữ số thập phân của các số sau:

$$1,23567 \approx 1,24$$

$$1,234567 \approx 1,23 \text{ (Ta cũng có thể nói làm tròn tới hàng phần trăm)}$$

II. CÁC CÔNG THỨC:

1. Một số tính chất đồng dư:

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$$

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m} \\ a.c \equiv b.d \pmod{m} \\ a^k \equiv b^k \pmod{m} \end{cases}$$

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a.c \equiv b.c \pmod{m.c}$$

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a.c \equiv b.c \pmod{m}$$

$$a + c \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \equiv b - c \pmod{m}$$

$$a.c \equiv b.c \pmod{m}, (c, m) = 1 \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

$$a.c \equiv b.c \pmod{m.c} \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}, (c \neq 0)$$

2) Số các ước của m: Nếu $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \dots p_k^{\alpha_k}$

Thì số các ước (tự nhiên) của m là $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$

3) Tổng các ước tự nhiên của m: $\sigma(m) = \prod_{i=1}^k \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1} = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \dots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}$

4) Định lý Fermat: $a \in \mathbb{Z}, p \in P, (a, p) = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

5) Giả sử n phân tích thành tích các thừa số nguyên tố như sau: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$

Khi đó ta có: $\varphi(n) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$

Trong đó $\varphi(n)$ là hàm số Euler, là số các số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng n nguyên tố cùng nhau với n

6) Định lý Euler: $a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*, (a, n) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

7) ƯCLN, BCNN: $[a, b] = \frac{a.b}{(a, b)}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$), Nếu $(a, b) = 1 \Rightarrow [a, b] = a.b$

8) Số chữ số của 1 số A tùy ý là: $[\log(A)] + 1$

Suy ra: Số các chữ số của một lũy thừa: a^m là $[\log(a^m)] + 1 = m.[\log(a)] + 1$

Trong đó $[\log(a^m)]$ là phần nguyên của $\log(a^m)$

Một số tính chất:

$$1) \log(a^m) = m.\log(a)$$

$$2) \log(x.y) = \log(x) + \log(y)$$

II. MỘT SỐ THUẬT TOÁN - DẠNG TOÁN HAY GẶP:

1. Thuật toán 1: Tìm số chữ số của 19^{9^9} .

Hướng dẫn:

$$\text{Số chữ số là } [\log(19^{9^9})] + 1 = [9^9 \log(19)] + 1 = 495415345 + 1 = 495415346$$

Vậy 19^{9^9} có 495415346 chữ số

Lưu ý: $[a]$ là kí hiệu phần nguyên của a, trên máy tính có kí hiệu **Int(a)**

-Trên máy tính phần nguyên là phím : **Alpha** **+** **→** **Int()**

-Bấm **log** ta bấm phím : **Shift** + **(-)**

-Tuy nhiên, $\log(a) = \log_{10}^a$; Phím $\log_{10}^a$ nhập bằng phím nổi trên bàn phím: **log** **□**

2.Thuật toán 2: Tìm 5 chữ số đầu tiên của số: $A = 2^{2^{10}}$

Hướng dẫn :

Ta thực hiện quy trình bấm phím như sau:

Bước 1: Tính $\log(A) = \log(2^{2^{10}}) = 2^{10} \log(2) = 308,2547156$

Bước 2: Bấm tiếp $\text{Ans} - 308 =$ (Trên màn hình ta được số: 0,2547155599

Bước 3: Bấm tiếp: $10^{\text{Ans}} =$ ta được số: 1,797693135

Bỏ dấu phẩy đi ta có số: 1797693135 thì đây là những số đầu tiên của số A mà đề bài chỉ yêu cầu tìm 5 chữ số đầu tiên nên ta kết luận: 5 chữ số đầu tiên của A là: 17976
 Xem thêm VD19 trang 232 tài liệu bồi dưỡng Casio Trần Đình Cư cho THPT

3.Thuật toán 3: Tính tổng các ước của 1987526177.

Hướng dẫn :

Có: $1987526177 = 7.13.43.47.101.107$

Tổng các ước:

$$\frac{7^2-1}{7-1} \cdot \frac{13^2-1}{13-1} \cdot \frac{43^2-1}{43-1} \cdot \frac{47^2-1}{47-1} \cdot \frac{101^2-1}{101-1} \cdot \frac{107^2-1}{107-1} = 8.14.44.48.102.108 = 2605768704$$

4.Thuật toán 4: Tìm 5 chữ số đầu tiên (từ bên trái) của số 2008^{2008}

Hướng dẫn :

Bấm: $\log(2008^{2008}) = 2008 \cdot \log(2008) = 6631,949527$

Bấm tiếp: $\text{Ans} - 6631 =$ ta được: 0,949527

Bấm tiếp: $10^{\text{Ans}} = 8,902799854$

Vậy 5 chữ số đầu tiên là: 89027

#Ta luôn có: $a^{4n+1} \equiv a \pmod{10}$ với mọi số tự nhiên a và n

- Thật vậy: Nếu a có tận cùng là các số 1, 5, 6 hiển nhiên đúng
 - Nếu a có tận cùng là 2 thì a^{4n} tận cùng là 6 nên a^{4n+1} tận cùng là 2
 - Nếu a có tận cùng là 3 thì a^{4n} tận cùng là 1 nên a^{4n+1} tận cùng là 3
 - Nếu a có tận cùng là 4 thì a^{4n} tận cùng là 6 nên a^{4n+1} tận cùng là 4
 - Nếu a có tận cùng là 7 thì a^{4n} tận cùng là 1 nên a^{4n+1} tận cùng là 7
 - Nếu a có tận cùng là 8 thì a^{4n} tận cùng là 6 nên a^{4n+1} tận cùng là 8
 - Nếu a có tận cùng là 9 thì a^{4n} tận cùng là 1 nên a^{4n+1} tận cùng là 9
- Từ đó ta có tính chất trên

5.Thuật toán 5 : Tìm GTLN, GTNN của một đa thức bậc hai :

Cho đa thức: $A = ax^2 + bx + c$

-Nếu $a > 0$ thì A có GTNN là : $\text{Min}A = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$ tại $x = \frac{-b}{2a}$

-Nếu $a < 0$ thì A có GTLN là : $\text{Max}A = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$ tại $x = \frac{-b}{2a}$

Ví dụ: Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$A = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}x^2 - \frac{\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{5}}x + \frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{7}} \quad (\text{đề Gò vấp năm 2013-2014})$$

$$\text{Min}A = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-b^2+4ac}{4a} = \frac{-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{5}}\right)^2 + 4 \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{7}}}{4 \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} = \dots$$

6. Thuật toán 6: Tìm min, Max dạng phân thức có công thức tổng quát:

$$A = \frac{ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + k}$$

Hướng dẫn :

Dùng phương pháp tìm miền giá trị, ta biến đổi biểu thức thành:

$$(Am - a)x^2 + (An - b)x + kA - c = 0 \quad (1)$$

$$\text{Có: } \Delta = (n^2 - 4mk)A^2 + (4mc + 4ak - 2bn)A + b^2 - 4ac$$

Vì (1) phải có nghiệm nên $\Delta \geq 0$

$$\Delta = (n^2 - 4mk)A^2 + (4mc + 4ak - 2bn)A + b^2 - 4ac \geq 0$$

Vào chương trình giải bất phương trình bậc 2 trên máy tính cầm tay và chọn dạng:

$$ax^2 - bx + c \geq 0$$

Với: $a = n^2 - 4mk$; $b = 4mc + 4ak - 2bn$; $c = b^2 - 4ac$

-Nếu $a \neq 0$ ta nhập các hệ số này vào chương trình giải BPT trên máy.

Cách ghi nhớ các công thức này:

$a = n^2 - 4mk$	Đây chính là công thức tính Delta của mẫu thức
$b = 4(mc + ak) - 2bn$	Nhớ: 4 lần tổng của tích hai đường chéo trừ 2 lần tích cột giữa
$c = b^2 - 4ac$	Delta tử thức

-Nếu $a = 0$ thì BPT là bậc nhất, vì vậy A đạt Min hay Max phụ thuộc vào b. Nghĩa là ta có:

$$\Delta = b.A + c \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq \frac{-c}{b} (b > 0) \\ A \leq \frac{-c}{b} (b < 0) \end{cases}$$

Lúc này: bài toán có giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất là: $\frac{-c}{b}$ tùy thuộc vào b âm hay dương

Áp dụng:

Bài 1: Tìm Min, Max của $A = \frac{2,3x^2 - 3,4x + 5,6}{0,3x^2 + 1,9}$

Hướng dẫn :

Ta viết lại: $A = \frac{2,3x^2 - 3,4x + 5,6}{0,3x^2 + 0.x + 1,9}$

Vào chương trình giải bất phương trình bậc 2 trên máy tính cầm tay và chọn dạng:

$$ax^2 - bx + c \geq 0$$

Nhập:

$$a = \Delta \text{ mẫu} = 0^2 - 4.0.1,9 = -2,28$$

$$b = 4 \text{ lần tổng của tích hai đường chéo} - 2 \text{ lần tích cột giữa} \\ = 4(2,3.1,9 + 0,3.5,6) - 2(-3,4).0 = 24,2$$

$$c = \Delta \text{ tử} = (-3,4)^2 - 4.2,3.5,6 = -39,96$$

Ta được $2,045404535 \leq X \leq 8,568630553$

Vậy ta đi đến kết luận:

$$\text{Min}A = 2,045404535 \text{ và } \text{Max}A = 8,568630553$$

Bài 2: Tìm Min của $y = \frac{1,9x+2,7}{\sqrt{3x-4,3}}$

Hướng dẫn :

$$\text{Điều kiện: } x \geq \frac{4,3}{3} = 1,4(3)$$

$$\text{Ta viết lại: } y^2 = \frac{(1,9x+2,7)^2}{\sqrt{3x-4,3}^2} = \frac{3,61x^2 + 10,26x + 7,29}{3x-4,3} = \frac{3,61x^2 + 10,26x + 7,29}{0x^2 + 3x - 4,3}$$

Vào chương trình giải bất phương trình bậc 2 trên máy tính cầm tay và chọn dạng:
 $ax^2 - bx + c \geq 0$

Nhập:

$$a = \Delta \text{ mẫu} = 3^2 - 4.0.(-4,3) = 9$$

$$b = 4 \text{ lần tổng của tích hai đường chéo} - 2 \text{ lần tích cột giữa} \\ = 4(3,61.(-4,3) + 0.7,29) - 2.10,26.3 = -123,6$$

$$c = \Delta \text{ tử} = (10,26)^2 - 4.3,61.7,29 = 0$$

Ta được: $X \leq 0,13$ hoặc $X \geq 13,73911111$

$$\text{Kết hợp điều kiện } x \geq \frac{4,3}{3} = 1,4(3) \text{ thì ta nhận } X \geq 13,73911111$$

$$\text{Hơn nữa ta đang có: } y^2 \geq 13,73911111 \text{ nên suy ra } y \geq \sqrt{13,73911111} = 3,706630695$$

Vậy ta đi đến kết luận: $\text{Min}A = 3,706630695$

Bài 3 : Tìm GTLN của $y = \frac{\sqrt{3,7x-8,2}}{1,2x+2,3}$ (đề HGS TPHMC năm 2018-2019)

Sử dụng công thức trên ta được :

$$a = n^2 - 4mk = 0$$

$$b = 4mc + 4ak - 2bn = -88,08$$

$$c = b^2 - 4ac = 13,69$$

$$\text{Vậy } \text{Max}y = \frac{-88,08}{13,69}$$

7.Thuật toán 7: Tìm ngày tháng:

Biết rằng ngày 01/01/1992 là ngày Thứ Tư (Wednesday) trong tuần. Cho biết ngày 01/01/2055 là ngày thứ mấy trong tuần ? (Cho biết năm 2000 là năm nhuận).

Hướng dẫn:

Khoảng cách giữa hai năm: $2055 - 1992 = 63$, trong 63 năm đó có 16 năm nhuận (366 ngày)

$$\text{Khoảng cách ngày giữa hai năm là: } 16 \times 366 + (63 - 16) \times 365 = 23011 \text{ ngày}$$

$$23011 \text{ chia } 7 \text{ dư được } 2 \Rightarrow \text{thứ } 6$$

LÊ XUÂN HỒNG

CHUYÊN ĐỀ 2: TÌM DƯ - TÌM CHỮ SỐ TẬN CÙNG

1. SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA SỐ :

Tính chất 1:

– Các số có chữ số tận cùng là 0, 1, 5, 6 khi nâng lên lũy thừa bậc bất kì thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

– Các số có chữ số tận cùng là 4, 9 khi nâng lên lũy thừa bậc lẻ thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

– Các số có chữ số tận cùng là 3, 7, 9 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n$ (n thuộc $\mathbb{N}$) thì chữ số tận cùng là 1.

– Các số có chữ số tận cùng là 2, 4, 8 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n$ (n thuộc $\mathbb{N}$) thì chữ số tận cùng là 6.

Tính chất 2: Một số tự nhiên bất kì, khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 1$ (n thuộc $\mathbb{N}$) thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

Tính chất 3 :

a) Số có chữ số tận cùng là 3 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ có chữ số tận cùng là 7; số có chữ số tận cùng là 7 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ có chữ số tận cùng là 3.

b) Số có chữ số tận cùng là 2 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ có chữ số tận cùng là 8; số có chữ số tận cùng là 8 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ có chữ số tận cùng là 2.

c) Các số có chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9, khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ không thay đổi chữ số tận cùng.

Bài 1 : Tìm chữ số tận cùng của các số:

a) 7^{99}

b) 14^{1414}

c) 4^{567}

Hướng dẫn:

a) Trước hết, ta tìm số dư của phép chia 99 cho 4 :

$$99 = 4 \cdot 24 + 3 \Rightarrow 7^{99} = 7^{4 \cdot 24 + 3} = 7^{4 \cdot 24} \cdot 7^3$$

7^4 có chữ số tận cùng là 1 nên $7^{4 \cdot 24}$ có tận cùng là 1;

7^3 có tận cùng là 3 $\Rightarrow 7^{99}$ có chữ số tận cùng là $3 \cdot 1 = 3$.

b) Dễ thấy $1414 = 2 \cdot 707 \Rightarrow 14^{1414} = 14^{2 \cdot 707} = (14^2)^{707}$

– Có: 14^2 có tận cùng là 6 $\Rightarrow (14^2)^{707}$ có tận cùng là 6

c) Có: $567 = 2 \cdot 283 + 1$

$$\Rightarrow 4^{567} = 4^{2 \cdot 283 + 1} = (4^2)^{283} \cdot 4$$

– $(4^2)^{283}$ có tận cùng là 6 nên $(4^2)^{283} \cdot 4$ có tận cùng là 4

Chữ số tận cùng của một tổng các lũy thừa được xác định bằng cách tính tổng các chữ số tận cùng của từng lũy thừa trong tổng.

Bài 2 : Tìm chữ số tận cùng của tổng $S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 2004^{8009}$.

Hướng dẫn:

Mọi lũy thừa trong S các có số mũ đều có dạng $4k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$)

Theo tính chất 2, mọi lũy thừa trong S đều có chữ số tận cùng giống nhau, bằng chữ số tận cùng của tổng :

$$2 + 3 + \dots + 2004 = \frac{(2004 - 1)(2 + 2004)}{2} = 2009009$$

Bài 3 : Tìm chữ số tận cùng của tổng $T = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + \dots + 2004^{8011}$

Hướng dẫn:

Mọi lũy thừa trong T các số mũ đều có dạng n^{4k+3} , $k = \overline{0, 2002}$

Theo tính chất 3: 2^3 có chữ số tận cùng là 8; 3^7 có chữ số tận cùng là 7; 4^{11} có chữ số tận cùng là 4; ...

Như vậy: từ $2^3 + 3^7 + \dots + 9^{31}$ (8 hạng tử – từ $k=0$ đến $k=7$) có chữ số tận cùng bằng chữ số tận cùng của tổng: $8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9$.

Số các số hạng còn lại là: $2003 - 8 = 1995$. Theo quy luật đó, các chữ số tận cùng của bộ 10 lũy thừa tiếp theo sẽ là: 0, 1, 2, ... 9. Hơn nữa: $1995 = 199 \cdot 10 + 5$. Ta sẽ có 199 tổng có các chữ số tận cùng giống nhau từ 0 đến 9. Vì vậy:

Từ 10^{35} đến 2000^{7995} (từ $k=8$ đến $k=1998$) có chữ số tận cùng bằng chữ số tận cùng của tổng: $199 \cdot (0 + 1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9)$

5 lũy thừa cuối cùng từ: $k=1999$ đến $k=2002$ có chữ số tận cùng bằng chữ số tận cùng của tổng: $1 + 8 + 7 + 4$

Như vậy, tổng T có chữ số tận cùng bằng chữ số tận cùng của tổng :

$$(8+7+4+5+6+3+2+9) + 199 \cdot (1+8+7+4+5+6+3+2+9) + 1+8+7+4$$

$$= 200(1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 8 + 7 + 4 = 9019.$$

Vậy chữ số tận cùng của tổng T là 9.

Bài 4 : Tìm hai chữ số tận cùng của các tổng :

a) $S_1 = 1^{2002} + 2^{2002} + 3^{2002} + \dots + 2004^{2002}$

b) $S_2 = 1^{2003} + 2^{2003} + 3^{2003} + \dots + 2004^{2003}$

Hướng dẫn:

Nhận xét:

$$(a, 5) = 1 \Rightarrow a^4 \text{ chia 5 dư 1} \Rightarrow a^{4k} \text{ chia 5 dư 1 } (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow a^{4k} - 1 : 5$$

$$(a, 5) = 1 \text{ thì } (a; 25) = 1 \Rightarrow a^{20} \text{ chia 25 dư 1} \Rightarrow a^{20k} \text{ chia 25 dư 1 } (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow a^{20k} - 1 : 25$$

$$\text{Thật vậy: Gọi } d = (a; 25) \Rightarrow \begin{cases} d/a \\ d/25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a \\ d/5^2 \\ 5 \text{ nguyên tố} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a \\ d/5 \end{cases} \Rightarrow d \in UC(a; 5) = \{1\} \Rightarrow d = 1$$

Ta chứng minh bài toán phụ : $a^2(a^{20k} - 1) : 100 \ (\forall a \in \mathbb{N})$

-Chứng minh $a^2(a^{20k} - 1) : 4$

$$\text{Nếu } a \text{ chẵn thì } a^2 : 4 \Rightarrow a^2(a^{20k} - 1) : 4$$

$$\text{Nếu } a \text{ lẻ } \Rightarrow a^2 \text{ chia 4 dư 1} \Rightarrow a^{20k} \text{ chia 4 dư 1} \Rightarrow a^{20k} - 1 : 4 \Rightarrow a^2(a^{20k} - 1) : 4$$

$$\text{Vậy: } \Rightarrow a^2(a^{20k} - 1) : 4 \ (\forall a \in \mathbb{N})$$

-Chứng minh $a^2(a^{20k} - 1) : 25$

$$\text{Nếu } a : 5 \Rightarrow a^2 : 25 \Rightarrow a^2(a^{20k} - 1) : 25$$

$$\text{Nếu } a \not: 5 \Rightarrow (a; 5) = 1 \Rightarrow a^{20k} - 1 : 25 \text{ (theo chứng minh trên)} \Rightarrow a^2(a^{20k} - 1) : 25$$

$$\text{Vậy: } \Rightarrow a^2(a^{20k} - 1) : 25 \ (\forall a \in \mathbb{N})$$

$$\text{-Hơn nữa: } (4; 25) = 1 \Rightarrow a^2(a^{20k} - 1) : 4 \cdot 25 \Rightarrow \boxed{a^2(a^{20k} - 1) : 100 \ (\forall a \in \mathbb{N})}$$

a) $S_1 = 1^{2002} + 2^{2002} + 3^{2002} + \dots + 2004^{2002}$

$$= 1^{2002} + 2^2(2^{2000} - 1) + \dots + 2004^2(2004^{2000} - 1) + 2^2 + 3^2 + \dots + 2004^2$$

Từ tính chất trên ta có : $2^{2000} - 1 ; \dots ; 2004^{2000} - 1$ đều chia hết cho 100

Vì thế hai chữ số tận cùng của tổng S_1 cũng chính là hai chữ số tận cùng của tổng

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2004^2$$

$$\text{Ta có: } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Rightarrow 1^2 + 2^2 + \dots + 2004^2 = \frac{2004 \cdot 2005 \cdot 4009}{6} = 2684707030$$

Vậy hai chữ số tận cùng của tổng S_1 là 30.

b) Hoàn toàn tương tự như câu a,

$$S_2 = 1^{2003} + 2^3(2^{2000} - 1) + \dots + 2004^3(2004^{2000} - 1) + 2^3 + 3^3 + 2004^3.$$

Vì thế, hai chữ số tận cùng của tổng S_2 cũng chính là hai chữ số tận cùng của $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2004^3$.

$$\text{Áp dụng công thức sau để tính: } S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

Bài tập tự luyện:

Bài 1 : Tìm số dư của các phép chia :

a) $2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 2003^{8005}$ cho 5

HD: Số mũ có dạng $4n+1$

b) $2^3 + 3^7 + 4^{11} + \dots + 2003^{8007}$ cho 5

Bài 2 : Tìm chữ số tận cùng của X, Y :

$$X = 2^2 + 3^6 + 4^{10} + \dots + 2004^{8010}$$

$$Y = 2^8 + 3^{12} + 4^{16} + \dots + 2004^{8016}$$

Bài 3 : Chứng minh rằng chữ số tận cùng của hai tổng sau giống nhau :

$$U = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 2005^{8013}$$

$$V = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + \dots + 2005^{8015}$$

Bài 4 : Chứng minh rằng không tồn tại các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn :

$$19^x + 5^y + 1980z = 1975^{430} + 2004.$$

II. SỬ DỤNG LÝ THUYẾT ĐỒNG DƯ :

Bài 1: tìm số dư của phép chia 2^{2009} cho 35

Hướng dẫn :

$$\text{Ta có: } 35 = 7^1 \cdot 5^1$$

$$\varphi(35) = 35 \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 24$$

$$\text{Lại có } (2, 35) = 1$$

$$\text{Theo định lý Ôle Ta suy ra: } 2^{\varphi(35)} \equiv 1 \pmod{35} \Leftrightarrow 2^{24} \equiv 1 \pmod{35}$$

$$\text{Ta có: } 2009 = 83 \cdot 24 + 17$$

$$2^{24} \equiv 1 \pmod{35} \Rightarrow 2^{24 \cdot 83} \equiv 1 \pmod{35}$$

$$2^{24 \cdot 83} \cdot 2^{17} \equiv 2^{17} \pmod{35} \Rightarrow 2^{2009} \equiv 2^{17} \pmod{35}$$

$$\text{Ta lại có: } 2^5 \equiv -3 \pmod{35} \Rightarrow (2^5)^3 \equiv (-3)^3 \equiv -27 \pmod{35}$$

$$\Rightarrow 2^{15} \cdot 2^2 \equiv -27 \cdot 2^2 = -108 \equiv -3 \equiv 32 \pmod{35}$$

$$\Rightarrow 2^{17} \equiv 32 \pmod{35}$$

Vậy dư trong phép chia trên là 32

Bài 2: tìm 2 chữ số tận cùng của số 2^{2019}

Hướng dẫn :

–Tìm 2 chữ số tận cùng nghĩa là dư trong phép chia cho 100

–Ta thấy $(2; 100) = 2$ không nguyên tố cùng nhau nên chưa thể áp dụng được định lý Ole. Chính vì thế ta cần biến đổi 1 chút. Nhớ lại kiến thức:

–Ta có tính chất: $\boxed{\text{Nếu } a = b \cdot q + r \ (r \neq 0) \text{ thì } (a; b) = (b; r).}$

–Với bài toán đã cho, ta có: $(2^{2019}; 100) = 4$ nên ta chia cả 2 số cho 4 ta được $(2^{2017}; 25) = 1$ trong đó $(2; 25) = 1$

Nếu $2^{2017} = 25 \cdot q + r \Rightarrow 2^2 \cdot 2^{2015} = 2^2 (25 \cdot q + r) \Rightarrow 2^{2019} = 100 \cdot q + 4r$. Khi đó $4r$ là dư trong phép chia 2^{2019} cho 100.

Như vậy để tìm dư trong phép chia: 2^{2019} cho 100 ta thực hiện tìm dư trong phép chia 2^{2017} cho 25 và nhân dư tìm được với 4.

Giải:

Có: $25 = 5^2 \Rightarrow \varphi(25) = 25 \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 20$ mà $(2; 25) = 1$ nên:

$$2^{\varphi(25)} \equiv 1 \pmod{25} \Rightarrow 2^{20} \equiv 1 \pmod{25} \Rightarrow (2^{20})^{100} \equiv 1^{100} \pmod{25}$$

$$\Rightarrow 2^{2000} \equiv 1 \pmod{25} \Rightarrow 2^{2000} \cdot 2^{17} \equiv 1 \cdot 2^{17} \equiv 22 \pmod{25} \Rightarrow 2^{2017} \equiv 22 \pmod{25}$$

$$\Rightarrow 2^{2017} \cdot 2^2 \equiv 22 \cdot 2^2 \pmod{25 \cdot 2^2} \Rightarrow 2^{2019} \equiv 44 \pmod{100}$$

Vậy 2^{2019} có 2 chữ số tận cùng là 44

Bài 3: Tìm 2 chữ số tận cùng của số 8^{2018}

Hướng dẫn :

–Bài toán cho ta hiểu cần tìm dư trong phép chia 8^{2018} cho 100.

–Ta thấy: $(8; 100) = 4$ và giả sử: $8^{2018} = 100.q + r$ thì ta luôn có: $(8^{2018}; 100) = (100; r) = 4$

(Nhắc lại: nếu $a = b.q + r$ thì $(a; b) = (b; r)$)

Như vậy, chia 2 vế cho 4 ta được: $\frac{8^{2018}}{4} = \frac{100.q}{4} + \frac{r}{4} \Leftrightarrow \frac{8.8^{2017}}{4} = 25.q + r_1 \quad (r_1 = r : 4)$

$$\Rightarrow 2.8^{2017} = 25.q + r_1 \Rightarrow 2.8^{2017} \equiv r_1 \pmod{25}$$

Từ đây ta thấy cần đi tìm dư trong phép chia 8^{2017} cho 25

Giải:

–Vì $(8; 25) = 1$ nên: $8^{\varphi(25)} \equiv 1 \pmod{25} \Rightarrow 8^{20} \equiv 1 \pmod{25} \Rightarrow (8^{20})^{100} \equiv 1^{100} \pmod{25}$

$$\Rightarrow 8^{2000} \equiv 1 \pmod{25} \Rightarrow 8^{2000}.8^{17} \equiv 1.8^{17} \equiv 8^9.8^8 \equiv 3.16 \equiv 23 \pmod{25} \Rightarrow 8^{2017} \equiv 23 \pmod{25}$$

$$\Rightarrow 2.8^{2017} \equiv 2.23 \pmod{25} \Rightarrow 4.2.8^{2017} \equiv 4.2.23 \pmod{4.25}$$

$$\Rightarrow 8^{2018} \equiv 84 \pmod{100}$$

Lưu ý: Ta có thể phân tích: $8^{2018} = 2^{3.2018}$ và thực hiện bài toán như **bài 2**; tuy nhiên cách làm của bài này ta vẫn phải ghi nhớ để có thể thực hiện bài tương tự như:

Tìm 2 chữ số tận cùng của số 12^{2020}

Bài 4: Tìm số dư khi chia số $13376^{2005!}$ cho 2000

Hướng dẫn:

– Giả sử A, B là hai số tự nhiên có tận cùng là 376, thì:

$$A.B = (1000.a + 376)(1000.b + 376) = 376000(a + b) + 10^6 a.b + 376^2$$

$$= 2000t + 1376; \text{ với } a, b, t \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow A.B \text{ chia } 2000 \text{ có số dư là } 1376.$$

Với $k > 1$ khi chia 13376^k cho 2000 (thực hiện $(k - 1)$ lần phép nhân 2 số đều có tận cùng là 376 rồi chia cho 2000) thì được dư là 1376. Đề bài ứng với $k = 2005!$

Cách khác: Dùng máy tính thử với các số mũ 2,3,4,5 ta thấy 4 chữ số tận cùng đều là 1376 từ đây suy ra số cần tìm

Bài 5: Tìm ba chữ số tận cùng của 2^{100} .

Hướng dẫn:

Phân tích: – Ta tìm dư trong phép chia 2^{100} cho 1000.

– Trước hết tìm số dư của phép chia 2^{100} cho 125. Theo bài 34: $2^{100} = 8125 + 1$, mà 2^{100} là số chẵn, nên ba chữ số tận cùng của nó chỉ có thể là (dùng máy tính để thử):

$$126, 376, 626 \text{ hoặc } 876.$$

– Hiển nhiên 2^{100} chia hết cho 8 nên ba chữ số tận cùng của nó phải chia hết cho 8. Bốn số trên chỉ có 376 thỏa mãn điều kiện này. Vậy ba chữ số tận cùng của 2^{100} là 376.

Bài 6: Tìm ba chữ số tận cùng của 3^{100} .

Hướng dẫn:

Một cách giải khác:

$$\begin{aligned} - \text{Ta phân tích như sau: } 3^{100} &= (10-1)^{50} = 10^{50} - \dots + \frac{50 \cdot 49}{2} \cdot 10^2 - 50 \cdot 10 + 1 \\ &= \text{BS1000} + \dots 500 - 500 + 1 = \text{BS1000} + 1. \end{aligned}$$

Vậy 3^{100} tận cùng là 001.

Tổng quát: Nếu n là số tự nhiên lẻ không chia hết cho 5 thì ba chữ số tận cùng của n^{100} là 001.

Bài 7: Tìm các số nguyên x để $\sqrt{199-x^2-2x}+2$ là số chính phương chẵn.

Hướng dẫn:

– Trước hết ta cần tìm x để $\sqrt{199-x^2-2x}$ nguyên.

Giải BPT: $199-x^2-2x \geq 0$ ta được: $-1-10\sqrt{2} \leq x \leq -1+10\sqrt{2} \Rightarrow -15 \leq x \leq 13$

– Thực hiện cách tính dãy lặp cho biểu thức: $\sqrt{\sqrt{199-x^2-2x}+2} : 2$

khi cho x chạy từ -15 đến 13 ta được các số thỏa: $-15; -3; 1; 13$

Bài 8: Tìm số tự nhiên x biết khi chia x cho 99 dư 1; cho 98 dư 2; cho 97 dư 3 và cho 95 dư 4

Hướng dẫn:

– Nhắm thấy số 100 thỏa mãn: chia cho 99 dư 1; cho 98 dư 2; cho 97 dư 3

– Vậy số cần tìm có dạng: $x = \text{BCNN}(99;98;97) \cdot k + 100 = 941094 \cdot k + 100 \quad (k \in \mathbb{Z})$

– Vì x chia cho 95 dư 4 nên $x - 4$ chia hết cho 95. Vậy ta phải có:

$$\frac{\text{BCNN}(99;98;97) \cdot k + 96}{95} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{941094 \cdot k + 96}{95} \in \mathbb{Z}$$

– Dùng cách tính dãy lặp: $A = A + 1; (941094 \cdot A + 96) \div 95$ bấm **[CALC]** và cho A chạy từ 0 đến khi thấy $R = 0$ thì dừng lại, bấm dấu **[=]** thêm 1 lần nữa ta được: $A = 91$.

Suy ra: $k = 91$ và $x = 941094 \cdot k + 100 = 85639654$ là số cần tìm

Phân tích: Với cách giải trên ta phải nhắm được số 100 dựa vào yếu tố đặc biệt của đề bài. Vấn đề đặt ra là: Nếu không nhắm được thì sao? Từ cách giải trên đó, ta đi đến cách giải chung cho các bài tương tự như sau:

– Vì x chia 95 dư 4 nên ta có: $x = 95 \cdot k + 4 \quad (k \in \mathbb{Z})$

– Mà x chia cho 97 dư 3 nên $x - 3$ phải chia hết cho 97, hay: $(95 \cdot k + 1) : 97$

Nhập vào máy dãy lặp: $A = A + 1; (95A + 1) \div 97$ và thu được $A = 49$

$\Rightarrow 95 \cdot k + 4 = 95 \cdot 49 + 4 = 4659$ thỏa mãn: Chia 95 dư 4 và chia 97 dư 3

$\Rightarrow x$ phải có dạng: $x = \text{BCNN}(95;97) \cdot a + 4659 = 9215 \cdot a + 4659$

– Vì x chia 98 dư 2 nên $x - 2$ chia hết cho 98 nên ta phải có: $(9215 \cdot a + 4657) : 98$

Thực hiện dãy lặp như trên ta tìm được $a = 81$

$\Rightarrow 9215 \cdot a + 4659 = 9215 \cdot 81 + 4659 = 751074$ thỏa mãn: Chia 95 dư 4, chia 97 dư 3, chia 98 dư 2

$\Rightarrow x$ phải có dạng: $x = \text{BCNN}(95;97;98) \cdot b + 751074 = 903070 \cdot b + 751074$

– Vì x chia 99 dư 1 nên $x - 1$ chia hết cho 99 nên phải có: $(903070 \cdot b + 751073) : 99$

Thực hiện dãy lặp như trên ta tìm được: $b = 94$

–Cuối cùng ta được: $x = 903070.b + 751074 = 941094.94 + 751074 = 85639654$ là số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Phân tích tối ưu cách giải:

-Tìm a để: $(9215.a + 4657): 98$

Ta kết hợp kiến thức đồng dư như sau:

Sử dụng MTCT bâm: $9215 \div R$ 98 ta được 94, $R=3 \Rightarrow 9215 \equiv 3 \pmod{98}$

Tương tự ta có: $4657 \equiv 51 \pmod{98}$

Nên : $(9215.a + 4657): 98 \Leftrightarrow 3a + 51 : 98 \Leftrightarrow 3(a + 17) : 98$ mà $(3; 98) = 1$

Suy ra: $a + 17 : 98 \Rightarrow a = 81$

-Tìm b để: $(903070.b + 751073): 99$. Tương tự cách làm trên ta có:

$903070 \equiv 91 \pmod{99}$

$751073 \equiv 59 \pmod{99}$

$\Rightarrow (903070.b + 751073): 99 \Leftrightarrow 91b + 59 : 99$.

Tại đây ta có thể lập bước lặp như trên để tìm b tuy nhiên ta có thể tiếp tục làm thủ công như sau:

Từ: $91b + 59 : 99 \Rightarrow 91b + 59 = 99k \Rightarrow 99k - 59 : 91 \Rightarrow 8k - 59 : 91 \Rightarrow 8k - 59 = 91m$

$\Rightarrow 91m + 59 : 8 \Rightarrow 3m + 3 : 8 \Rightarrow 3(m + 1) : 8$ mà $(3; 8) = 1 \Rightarrow m + 1 : 8$

$\Rightarrow m = 7$ thay ngược lên ta được: $k = \frac{91m + 59}{8} = \frac{91.7 + 59}{8} = 87$

$\Rightarrow b = \frac{99k - 59}{91} = \frac{99.87 - 59}{91} = 94$

Với cách làm này, nếu học sinh chịu khó luyện tập thì có thể làm nhanh hơn bấm máy tính. Các em chỉ cần thực hiện lại bài này nhiều lần cho đến khi thành thục sẽ thấy rất thú vị



Bí mật của việc tìm chữ số tận cùng của một lũy thừa:

–Các số có tận cùng bằng 1, 5, 6 khi nâng lên lũy thừa đều có tận cùng là 1, 5, 6

–Các số có tận cùng là 25, 625, 76, 376, 9376, 09376 khi nâng lên lũy thừa cũng đều có tận cùng là 25, 625, 76, 376, 9376, 09376

Các bài tập tự luyện:

1)Tìm hai chữ số tận cùng của số: 4^{2018} . ĐS: 36

2)Tìm hai chữ số tận cùng của số: 8^{2018} . ĐS: 84

3)Tìm dư khi chia 2001^{2010} cho 2003. ĐS: 256

4)Tìm chữ số tận cùng của: $2^{2005} + 7^{2005} + 9^{2005}$. ĐS: 8

5)Tìm chữ số hàng chục nghìn của số 15^{2009} . ĐS: 5 chữ số tận cùng là: 59375

6)Tìm 2 chữ số tận cùng của số: $A = 2^{1999} + 2^{2000} + 2^{2001}$. ĐS: 16

10)Tìm bốn chữ số tận cùng của 5^{1994} . ĐS: 5625

Một cách giải khác:

– Ta có: $5^4 = 625$

– Nhận thấy số có tận cùng là 625 lũy thừa bậc bất kỳ vẫn có tận cùng là 625

– Do đó: $5^{1994} = 5^{4k+2} = 25 \cdot (5^4)^k = 25 \cdot (625)^k = 25(\dots 625) = \dots 5625$.

Vậy bốn chữ số tận cùng của số 5^{1994} là 5625.

11)Tìm số dư của phép chia 23^{2005} cho 100 (Hay tìm 2 chữ số tận cùng) ĐS: 43

- 12) Tìm số dư của phép chia 7^{2005} chia cho 10 ĐS: 7
 13) Tìm chữ số hàng đơn vị của 17^{2002} . ĐS: 9
 14) Tìm hai chữ số cuối cùng của tổng: $A = 2^{2000} + 2^{2001} + 2^{2002}$ ĐS: 32
Một cách giải khác: Ta có $A = 2^{2000} (1 + 2^1 + 2^2) = 7 \cdot 2^{2000}$

$$\begin{aligned} \text{Mà ta lại có } 2^{10} &\equiv 24 \pmod{100} \\ \Rightarrow (2^{10})^5 &\equiv 24^5 \equiv 24 \pmod{100} \\ \Rightarrow 2^{250} &\equiv 24^5 \equiv 24 \pmod{100} \\ \Rightarrow 2^{1250} &\equiv 24^5 \equiv 24 \pmod{100} \\ \Rightarrow 2^{2000} &= 2^{1250} \cdot 2^{250} \cdot 2^{250} \equiv 24 \cdot 24 \cdot 24 \equiv 76 \pmod{100} \\ \Rightarrow A &= 7 \cdot 2^{2000} \equiv 7 \cdot 76 \equiv 32 \pmod{100} \end{aligned}$$

Vậy: Hai chữ số cuối cùng của tổng A là 32

- 15) Tìm hai chữ số cuối cùng: $B = 2^{2000} + 2^{2001} + 2^{2002} + 2^{2003} + 2^{2004} + 2^{2005} + 2^{2006}$
 HD: Ta có $B = 2^{2000} (1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6) = 127 \cdot 2^{2000}$
 $\Rightarrow B = 127 \cdot 2^{2000} \equiv 127 \cdot 76 \equiv 52 \pmod{100}$

Vậy: Hai chữ số cuối cùng của tổng B là 52

- 16) Tìm số dư của phép chia 1997^{1997} cho 13 ĐS: 8
 17) Tìm dư trong phép chia 2^{1000} cho 25 ĐS: 1
 18) Tìm dư trong phép chia 2^{1997} cho 49 ĐS: 4

- Một cách giải khác:** Ta có $2^2 \equiv 4 \pmod{49}$
 $\Rightarrow 2^{10} \equiv 44 \pmod{49} \Rightarrow 2^{20} \equiv 44^2 \equiv 25 \pmod{49}$
 $\Rightarrow 2^{21} \equiv 25 \cdot 2 \equiv 1 \pmod{49} \Rightarrow (2^{21})^{95} \equiv 1^{95} \equiv 1 \pmod{49}$
 $\Rightarrow 2^{1995} \equiv 1 \pmod{49} \Rightarrow 2^{1997} = 2^{1995} \cdot 2^2 \equiv 1 \cdot 4 \equiv 4 \pmod{49}$

- 19) Tìm dư trong phép chia 2^{1999} cho 35 ĐS: 23

- 20) Tìm số dư của phép chia:

- a) 13^8 cho 27 ĐS: 25
 b) 25^{14} cho 65 ĐS: 40
 c) 1978^{38} cho 3878. ĐS: 744
 d) 2005^9 cho 2007 ĐS: 1495
 e) 7^{15} cho 2001 ĐS: 1486

- 21) Tìm chữ số hàng đơn vị của số 17^{2002} ĐS: 9
 22) Tìm chữ số hàng chục, hàng trăm của số 23^{2005} . ĐS: 343
 23) Tìm chữ số hàng đơn vị của số $A = 103^{2006}$. ĐS: 9
 24) Tìm chữ số tận cùng của 7^{2005} . ĐS: 7

Một cách giải khác: Có $7^4 = \overline{A1}$

$$7^{2005} = (7^4)^{501} \cdot 7 = (\overline{A1})^{501} \cdot 7 = \overline{B1} \cdot 7 = \overline{C7}$$

Vậy chữ số tận cùng của 7^{2005} là 7

- 25) Tìm chữ số hàng trăm của $P = 29^{2007}$. ĐS: 309

CHUYÊN ĐỀ 3:

TÌM SỐ THỎA ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

I. TÌM SỐ:

Bài 1 : Tìm số lớn nhất và số nhỏ nhất trong các số tự nhiên có dạng : $\overline{1a2b3c4}$ chia hết cho 7 (CD bồi dưỡng HSG Casio 570VN PLUS dành cho HS THPT của Trần Đình Cư trang 226)

Hướng dẫn:

–Tìm số lớn nhất ta cho $a = b = 9$ và cho c chạy từ 0 đến 9 ta được số : 1929354

–Tìm số nhỏ nhất ta cho $a = b = 0$ và cho c chạy từ 0 đến 9 ta được số : 1020334

Bài 2 : Tìm số tự nhiên n biết tổng các chữ số của n là $n^2 - 1999n + 28$

Hướng dẫn:

–Tổng các chữ số của n phải lớn hơn 0 nên : $n^2 - 1999n + 28 > 0$

Giải BPT này ta được : $n < 0,014007102$ hoặc $n > 1998,985993$

–Tổng các chữ số của n luôn nhỏ hơn hoặc bằng n nên ta có :

$$n^2 - 1999n + 28 \leq n \Leftrightarrow n^2 - 2000n + 28 \leq 0$$

Giải BPT bằng MT ta được : $0,014000099 \leq n \leq 1999,986$

–Từ đó suy ra : $n = 1999$

Bài 3 : Cho $A = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2007}$. Tìm dư khi chia A cho 2007

Hướng dẫn:

Nhận xét : A là 1 cấp số nhân công bội 2 nên ta có :

$$A = 2 \cdot \frac{2^{2007} - 1}{2 - 1} = 2^{2008} - 2$$

–Tìm dư 2^{2008} cho 2007 ta được dư : 1024 vậy A đồng dư 1022 mod 2007

Bài 4: Cho $A = 2.4.6.8 \dots 2014.2016$. Khi phân tích A ra thừa số nguyên tố ta thấy có 2^x . Tìm x ?

Hướng dẫn:

Có: $A = 2.4.6.8 \dots 2014.2016$ Dãy số này gồm có $\frac{2016-2}{2} + 1 = \frac{2016}{2} = 1008$ số
 $= 2.(2.2).(2.3).(2.4) \dots (2.1007).(2.1008)$. Lấy 1008 thừa số 2 ra ta được:

$$=2^{1008}.1.2.3...1007.1008.$$

Vì chỉ xét cơ số 2 tức xét các số chẵn nên, bỏ các số lẻ ta được

$$=2^{1008}.2.4.6.8...1006.1008$$

Dãy số: 2.4.6.8...1006.1008 gồm có $\frac{1008}{2} = 504$ số. Tiếp tục bỏ đi các số lẻ Ta lại được

$$=2^{1008}.2^{504}.2.4.6.8...504$$

$$=2^{1008}.2^{504}.2^{252}.2.4.6.8...252$$

$$=2^{1008}.2^{504}.2^{252}.2^{126}.2.4.6.8...126$$

$$=2^{1008}.2^{504}.2^{252}.2^{126}.2^{63}.2.4.6.8...62$$

$$=2^{1008}.2^{504}.2^{252}.2^{126}.2^{63}.2^{31}.2.4.6.8...30$$

$$=2^{1008}.2^{504}.2^{252}.2^{126}.2^{63}.2^{31}.2^{15}.2.4.6.8...14$$

$$=2^{1008}.2^{504}.2^{252}.2^{126}.2^{63}.2^{31}.2^{15}.2^7.2.4.6$$

$$=2^{1008}.2^{504}.2^{252}.2^{126}.2^{63}.2^{31}.2^{15}.2^3.2$$

$$\text{Như vậy } x = 1+3+15+31+63+126+252+504+1008 = 2003$$

Bài 5: Tìm hai số tự nhiên nhỏ nhất a, b thỏa: $(\overline{ab})^4 = \overline{a***b}$**

Hướng dẫn:

Ta có: $32 \leq \overline{ab} \leq 56$. Dùng cách tính dãy lặp bấm ta được: số 45

Bài 6: Tìm các số x, y sao cho khi chia $\overline{xxxxx}$ cho $\overline{yyyy}$ có thương là 16 dư là r, còn khi chia $\overline{xxxx}$ cho $\overline{yyy}$ cũng có thương là 16 nhưng có số dư là (r-2000).

Hướng dẫn:

$$\text{Theo đề bài ta có : } \overline{xxxxx} = 16. \overline{yyyy} + r \quad (1)$$

$$\overline{xxxx} = 16. \overline{yyy} + r - 2000 \quad (2).$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được:

$$\overline{x0000} = 16. \overline{y000} + 2000 \Leftrightarrow 10x = 16y + 2 \Leftrightarrow 5x = 8y + 1 \Leftrightarrow y = \frac{5x-1}{8}$$

Vì $0 < x, y \leq 9$ nên suy ra $x = 5, y = 3$.

Bài 7: Tìm số nguyên tự nhiên nhỏ nhất n sao cho $2^8 + 2^{11} + 2^n$ là một số chính phương.

Hướng dẫn:

Nhập dãy lặp: $X = X + 1 : \sqrt{2^8 + 2^{11} + 2^X}$ Cho x chạy từ 0 ta có: $X = 12$ thỏa

Bài 8: Tìm số tự nhiên A lớn nhất để các số 367222, 440659, 672268 khi lần lượt chia cho A đều có cùng số dư.

Hướng dẫn:

Các số 367222, 440659, 672268 khi chia cho A đều có số dư bằng nhau, nên:

$$367222 = Aq_1 + r$$

$$440659 = Aq_2 + r$$

$$672268 = Aq_3 + r$$

$$\text{Suy ra: } 73437 = 440659 - 367222 = A(q_2 - q_1)$$

$$231609 = 672268 - 440659 = A(q_3 - q_2)$$

$$\text{Do đó: } A \text{ là } \text{U'CLN}(73437, 231609) = 5649$$

Bài 9 : Tìm các số tự nhiên có hai chữ số $\overline{ab}$ sao cho $(\overline{ab})^n = \overline{\dots ab}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Hướng dẫn:

$$\text{Dễ thấy nếu } (\overline{ab})^2 = \overline{\dots ab} \text{ thì } (\overline{ab})^n = \overline{\dots ab}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{Từ tính chất } (\overline{ab})^2 = \overline{\dots ab} \text{ suy ra } b \text{ chỉ có thể là } 1, 5, 6$$

$$\text{Bấm máy } X=X+1:A=10X+B:A^2$$

Bấm phím 'CALC', dấu '=' và cho $X = 0$, $B = 1$ rồi bấm '=' ...'. Quan sát trên màn hình nếu hai số cuối của A^2 bằng A thì A là số cần tìm

Khi $X = 9$ thì lại cho $X = 0$, $B = 5$ (hoặc $B = 6$) rồi tiếp tục như trên

Kết quả : **25 hoặc 76**

Bài 10: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^4 + 2y^4 + 3z^4$ (với 8 chữ số thập phân sau dấu phẩy)

Hướng dẫn:

Áp dụng BĐT Bunnhiacopxki ta có:

$$(x^4 + 2y^4 + 3z^4) \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right) \geq (x^2 + \sqrt[3]{2}y^2 + \sqrt[3]{3}z^2)^2 \quad (1)$$

$$(x^2 + \sqrt[3]{2}y^2 + \sqrt[3]{3}z^2) \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right) \geq (x + y + z)^2 = 9 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } P \geq \frac{81}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right)^3} \approx 5,26532627$$

II. TÌM CHU KỲ CỦA SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN:

Bài 1: Tìm chu kỳ của số thập phân vô hạn tuần hoàn có được từ phép chia 10 cho 23?

Hướng dẫn:

Trên máy tính Fx-570VN Plus :

* Lấy $10 : 23 = 0,434782608$ → màn hình chỉ hiển thị 10 chữ số

Vậy 10 số dư đầu tiên là: **0,434782608**

* Lấy $0,434782608 \times 23 = 9,999999984$

$$10 - \text{Ans} = 0,000000016$$

$$\text{Vậy } 10 = 0,434782608 \times 23 + 0,000000016$$

$$\Rightarrow 10:23 = 0,434782608 + 0,000000016:23 = 0,434782608 + 0,000000001 \times (16:23)$$

* Lấy $16 : 23 = (0,695652173)$ → Màn hình hiển thị chưa hết kết quả của phép chia.

⇒ Chín số dư tiếp theo là: **695652173**

* Lấy $0,695652173 \times 23 = 15,99999998$

$$16 - \text{Ans} = 0,000000021$$

$$\text{Vậy } 16 = 0,695652173 \times 23 + 0,000000021. \text{ Tương tự cách làm trên ta được:}$$

$$21 : 23 = (0,913043478) \Rightarrow \text{Chín số dư tiếp theo là: } \mathbf{913043478}$$

$$\text{Vậy: } 10 : 23 = 0,434782608695652173913043478 \dots$$

$$= 0,4347826086956521739130$$

⇒ Chu kỳ của số thập phân vô hạn tuần hoàn trên là: **(4347826086956521739130)**

Trên máy Fx-580VNx cho ta kết quả đầy đủ sau 1 lần bấm duy nhất

Bài 2: Tìm chữ số thập phân thứ 2005 sau dấu phẩy của số:

$$a) A = \frac{1}{37}; \quad b) B = \frac{1}{41}; \quad c) C = \frac{10}{51}; \quad d) C = \frac{1}{49}$$

Hướng dẫn:

Các phép toán này trên máy tính Fx-580VNx cho ta kết quả đầy đủ và chính xác.

a) Số $A = \frac{1}{37} = 0,027027(027)\dots$ tuần hoàn chu kỳ 3 chữ số 027.

Vì $2005 \equiv 1 \pmod{3}$ nên chữ số thứ 2005 sau dấu phẩy của A là:

b) Số $B = \frac{1}{41} = 0,0243902439(02439)\dots$ tuần hoàn chu kỳ 5 chữ số 02439.

Vì $2005 \equiv 0 \pmod{5}$ nên chữ số thứ 2005 sau dấu phẩy của B là:

c) Số $C = \frac{10}{51} = 0,1960784313725490$ TH chu kỳ 16 chữ số: 1960784313725490

Vì $2005 \equiv 5 \pmod{16}$ nên chữ số thứ 2005 sau dấu phẩy của C là:

d) Số $D = \frac{1}{49} = 0,020408163265306122448979591836734693877551)$

tuần hoàn chu kỳ 42 chữ số 020408163265306122448979591836734693877551

Vì $2005 \equiv 31 \pmod{42}$ nên chữ số thứ 2005 sau dấu phẩy của D là:

Bài 3: Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho lập phương số đó được 1 số có 3 chữ số đầu bằng 1 và 4 chữ số cuối cũng đều bằng 1, tức là: $n^3 = \overline{111\dots1111}$

Hướng dẫn:

Số tự nhiên nhỏ nhất có tận cùng là 1111 là 8471

$$\sqrt[3]{11111111} = 103,574413$$

$$\sqrt[3]{111111111} = 223,144316$$

$$\sqrt[3]{1111111111} = 480,7498566$$

$$\sqrt[3]{11111111111} = 1035,74413$$

Lần lượt thử với các số 10384713; 22384713; 48084713... ta tìm được số nhỏ nhất thỏa mãn là 1038471

III. BIỂU DIỄN SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN THÀNH PHÂN SỐ:

VD1: Giả sử có số $0,(a)$ trong đó $a \in \mathbb{N}; a = 1, 9$

Hướng dẫn:

$$\text{Ta có: } 0,(a).10 = a + 0,(a) \Leftrightarrow 0,(a).9 = a$$

$$\Rightarrow 0,(a) = \frac{a}{9}$$

$$\text{VD: } 0,(1) = \frac{1}{9}; 0,(3) = \frac{3}{9} \dots$$

VD2: Giả sử có: $0,\overline{ab}$ trong đó $a, b \in \mathbb{N}; a, b = \overline{1, 9}$

Hướng dẫn:

$$\text{Có } 0,\overline{(ab)} \cdot 100 = \overline{ab} + 0,\overline{(ab)}$$

$$\Rightarrow 0,\overline{(ab)} \cdot 99 = \overline{ab}$$

$$\Rightarrow 0,\overline{(ab)} = \frac{ab}{99}$$

$$\text{VD: } 0,(01) = \frac{01}{99}; 0,(13) = \frac{13}{99} \dots$$

$$\text{VD: } 0,1(23) = \frac{1+0,(23)}{10} = \frac{1+\frac{23}{99}}{10} = \frac{99+23}{990} = \frac{122}{990} = \frac{61}{495}$$

IV. LIÊN PHÂN SỐ :

1. Nhắc lại: Giả sử $x = \frac{a}{b} (a, b \in \mathbb{Z})$

Ta thực hiện phép chia Ôclit trên các số a, b như sau:

$$\begin{aligned} a &= b q_0 + r_1 \\ b &= r_1 q_1 + r_2 \\ r_1 &= r_2 q_2 + r_3 \\ &\dots \dots \dots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_{n-1} + r_n \\ r_{n-1} &= r_n q_n \end{aligned}$$

Trong thực hành ta đặt tính và chia như sau:

					a	b
				b	r₁	q₀
			r₁	r₂	q₁	
		r₂	r₃	q₂		
		r₄	q₃			
	...	...				
r_{n-1}	r_n					
0	q_n					

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}} = \dots = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{\dots \frac{1}{q_n}}}}} \quad (q_n > 1)$$

(Trong đó $q_0 \in \mathbb{Z}, q_1, q_2, q_3, \dots, q_n \in \mathbb{Z}^+, q_n > 1$)

Biểu thức trên gọi là một liên phân số hữu hạn cấp n .

Ký hiệu: $\delta = [q_0, q_1, q_2, \dots, q_n]$, n gọi là cấp, $q_0, q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ gọi là các số hạng của liên phân số.

Bài tập tự luyện:

Bài 1: (Vô địch toán New York, 1985) Biết $\frac{15}{17} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a + \frac{1}{b}}}$ trong đó a và b là các số dương.

Tính a, b.

ĐS: a = 7, b = 2

Bài 2: (Thi khu vực lớp 9, 2002) Tính và viết kết quả dưới dạng phân số:

$$A = 3 + \frac{5}{2 + \frac{4}{2 + \frac{5}{2 + \frac{4}{2 + \frac{5}{3}}}}} \quad B = 7 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}}$$

Bài 3: (Thi khu vực lớp 9, 2003)

a. Tính và viết kết quả dưới dạng phân số: $A = \frac{20}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}}$ $B = \frac{2}{5 + \frac{1}{6 + \frac{1}{7 + \frac{1}{8}}}}$

b. Tìm các số tự nhiên a và b biết: $\frac{329}{1051} = \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{a + \frac{1}{b}}}}$

Bài 4: (Thi khu vực 2004, lớp 9) Tìm giá trị của x, y từ các phương trình sau:

$$a. 4 + \frac{x}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}} = \frac{x}{4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} \quad b. \frac{y}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5}}} + \frac{y}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{6}}}$$

Bài 5: (Thi khu vực, 2001, lớp 6 – 7) Lập qui trình bấm phím để tính giá trị của liên phân số sau $M = [3, 7, 15, 1, 292]$ và tính $\pi - M$?

Bài 6: (Sở GD Hải Phòng, 2003 – 2004) Cho $A = 30 + \frac{12}{10 + \frac{5}{2003}}$

Hãy viết lại A dưới dạng $A = [a_0, a_1, \dots, a_n]$?

Bài 7: Các số $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$ có biểu diễn gần đúng dưới dạng liên phân số như sau:

$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, 2, 2]; \sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1]; \pi = [3, 17, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3]$. Tính các liên phân số trên và so sánh với số vô tỉ mà nó biểu diễn?

LÊ XUÂN HỒNG

CHUYÊN ĐỀ 4

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

A. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN:

I. LÝ THUYẾT:

–**Định lý 1:** Nếu $(a, b) = d$ thì tồn tại hai số nguyên x_0, y_0 sao cho $ax_0 + by_0 = d$, x_0, y_0 được xác định bằng thuật toán Ô-clit

–**Thuật toán Ô-clit:** $a = bq + r$ với $0 \leq r \leq b - 1$ thì $(a, b) = (b, r)$

1) Nghiệm nguyên của phương trình: $ax + by = c \quad (a, b, c \in \mathbb{Z}) \quad (*)$

+Nếu $\begin{cases} (a, b) = d \neq 1 \\ c \not\equiv d \end{cases}$ thì $(*)$ vô nghiệm

+Nếu $(a, b, c) = d \neq 1$ Thì ta chia hai vế của phương trình $(*)$ cho d để được phương trình đơn giản

–Nếu $(a, b) = 1$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm nguyên và nghiệm được xác định là :

$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \end{cases}$ Trong đó $t \in \mathbb{Z}$ và (x_0, y_0) là một nghiệm riêng của phương trình $(*)$

2) Xác định nghiệm riêng theo định lý 1:

Chứng minh:

Ta có $(a, b) = 1 \Rightarrow$ có hai số nguyên p, q : $ap + bq = 1 \Rightarrow apc + bq = c$

Mà $ax + by = c$ nên: $a(x - pc) = b(qc - y)$ (1), vì $(a, b) = 1$

$\Rightarrow (x - pc) : b \Rightarrow$ có số nguyên t sao cho : $x = pc + bt$ hay $x = x_0 + bt$ (2)
Với $x_0 = pc$.

Thay (2) vào (1) được : $abt = b(qc - y) \Rightarrow y = qc - at$ hay $y = y_0 - at$ với $y_0 = qc$

3) Dùng thuật toán Ô-clit để tìm nghiệm riêng của $\begin{cases} ax + by = 1 \\ (a, b) = 1 \end{cases} \quad (**)$

$$\left. \begin{array}{l} a = bq_0 + r_1 \\ b = r_1q_1 + r_2 \\ r_{k-1} = r_kq_k + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow m = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{q_k}}} = \frac{p}{q} \Rightarrow \text{Nghiệm riêng của } ax + by = 1 \text{ là } x_0, y_0$$

với:

$$\begin{cases} |x_0| \leq p \\ |y_0| \leq q \end{cases} \text{ Hoac } \begin{cases} |x_0| \leq q \\ |y_0| \leq p \end{cases}$$

Từ đây ta thay vào để tìm 1 nghiệm riêng của $(**)$.

Nhân 2 vế $(**)$ với c ta suy ra nghiệm riêng của $(*)$

Ví dụ: Giải phương trình $40x + 31y = 1$

Hướng dẫn:

Ta có $(40, 31) = 1$ nên phương trình có nghiệm nguyên (Dùng thuật toán Ô-clit)

Tìm nghiệm riêng :

$$40 = 31 \cdot 1 + 9 \quad 9 = 40 - 31 \cdot 1$$

$$31 = 9 \cdot 3 + 4$$

$$\Rightarrow 4 = 31 - 9 \cdot 3 \Rightarrow 4 \cdot 2 = (31 - 9 \cdot 3) \cdot 2$$

$$\begin{aligned}
 9 &= 4 \cdot 2 + 1 \\
 \Rightarrow 9 - 4 \cdot 2 &= 1 \Rightarrow (40 - 31 \cdot 1) - (31 - 9 \cdot 3) \cdot 2 = 1 \Rightarrow 40 - 3 \cdot 31 + 6 \cdot 9 = 1 \\
 \Rightarrow 40 - 3 \cdot 31 + 6 \cdot (40 - 31 \cdot 1) &= 1 \Rightarrow 7 \cdot 40 - 9 \cdot 31 = 1 \\
 \Rightarrow 40 \cdot 7 + 31 \cdot (-9) &= 1 \Rightarrow x_0 = 7, y_0 = -9 \\
 \Rightarrow \text{Phương trình có nghiệm } x &= 7 + 31t, y = -9 - 40t \text{ với } t \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Hoặc theo cách trình bày trên ta có :

$$m = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}} = \frac{9}{7} \Rightarrow \begin{cases} |x_0| = 7 \\ |y_0| = 9 \end{cases} \text{ Thay các giá trị từ hệ này vào ta thấy } \begin{cases} x_0 = 7 \\ y_0 = -9 \end{cases} \text{ thỏa.}$$

Cách 2 : Cách tổng quát :

$$\text{Có : } y = \frac{1 - 40x}{31} = \frac{1 - 9x}{31} - x$$

$$\text{Ta phải có : } \frac{1 - 9x}{31} = t, t \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{1 - 31t}{9} = \frac{1 - 4t}{9} - 3t$$

$$\text{Ta phải có : } \frac{1 - 4t}{9} = a, a \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = \frac{1 - 9a}{4} = \frac{1 - a}{4} - 2a$$

$$\text{Ta phải có : } \frac{1 - a}{4} = b, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = 1 - 4b$$

$$\text{Suy ra : } t = \frac{1 - a}{4} - 2a = b - 2(1 - 4b) = 9b - 2$$

$$x = \frac{1 - 4t}{9} - 3t = \frac{1 - 4(9b - 2)}{9} - 3(9b - 2) = 7 - 31b$$

$$y = \frac{1 - 40x}{31} = \frac{1 - 40(7 - 31b)}{31} = -9 + 40b$$

Cách giải 3: Dùng tính chất chia hết để xét các nghiệm và hệ số a, b, c

Cách khác : Có thể dùng máy tính cầm tay để tìm 1 nghiệm riêng

a) Phương pháp phát hiện tính chia hết của ẩn:

Bài 2: Giải phương trình với nghiệm nguyên:

$$3x + 17y = 159$$

Hướng dẫn:

Cách 1:

Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn phương trình. Ta thấy 159 và 3x đều chia hết cho 3 nên $17y : 3$ do đó $y : 3$ (vì 17 và 3 nguyên tố cùng nhau)

Đặt $y = 3t$ ($t \in \mathbb{Z}$). Thay vào phương trình ta được: $3x + 17 \cdot 3t = 159$

$$\Leftrightarrow x + 17t = 53 \quad \text{Do đó: } \begin{cases} x = 53 - 17t \\ y = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z})$$

Đảo lại, thay các biểu thức của x và y vào phương trình ta được nghiệm đúng.

Vậy phương trình (1) có vô số nghiệm nguyên được xác định bằng công thức:

$$\begin{cases} x = 53 - 17t \\ y = 3t \end{cases} \quad (t \text{ là số nguyên tùy ý})$$

Cách 2: Cách tổng quát:

$$x = \frac{159 - 17y}{3} = \frac{53 \cdot 3 - 15y - 2y}{3} = 53 - 5y - \frac{2y}{3}$$

Ta phải có: $2y : 3 \Rightarrow y : 3 \Rightarrow y = 3t, t \in \mathbb{Z}$

Bài 3: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $11x + 18y = 120$

Hướng dẫn:

Ta thấy $11x:6$ nên $x:6$. Đặt $x = 6k$ (k nguyên). Thay vào (1) và rút gọn ta được:

$$11k + 3y = 20$$

Biểu thị ẩn mà hệ số của nó có giá trị tuyệt đối nhỏ (là y) theo k ta được:

$$y = \frac{20-11k}{3}$$

Tách riêng giá trị nguyên của biểu thức này: $y = 7 - 4k + \frac{k-1}{3}$

Lại đặt $\frac{k-1}{3} = t$ với t nguyên suy ra $k = 3t + 1$. Do đó:

$$y = 7 - 4(3t+1) + t = 3 - 11t$$

$$x = 6k = 6(3t+1) = 18t + 6$$

Thay các biểu thức của x và y vào (1), phương trình được nghiệm đúng.

Vậy các nghiệm nguyên của (1) được biểu thị bởi công thức:

$$\begin{cases} x = 18t + 6 \\ y = 3 - 11t \end{cases} \text{ với } t \text{ là số nguyên tùy ý}$$

Bài tập tự luyện: Tìm các nghiệm nguyên:

Lưu ý: Đáp số mới chỉ ra 1 nghiệm nguyên

1) $6x+15y=10$ ĐS: vô nghiệm

3) $4x+5y=65$ ĐS: (5;9)

2) $2x+3y=11$ ĐS: (4;11)

4) $13x+5y=175$ ĐS: (13; 5)

B.PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HAI ẨN :

XEM TÀI LIỆU MỚI TẢI VỀ TRONG THƯ MỤC : TAI LIEU THAM KHAO

Bài 1 : Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - xy + y^2 = 2x - 3y - 2$ (1)

Hướng dẫn :

Coi (1) là phương trình bậc 2 đối với ẩn y ta được:

$$y^2 + (3-x)y + (x^2 - 2x + 2) = 0 \quad (2)$$

$$\Delta = -3x^2 + 2x + 1$$

Để phương trình (2) có nghiệm thì :

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -1/3 \leq x \leq 1$$

Giải bất phương trình $y^2 - 2y - 11 \geq 0$ trên máy tính Fx-580 VNX ta bấm :

Menu **(-)** **2** **3**

Mà $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{0; 1\}$

-Với $x = 0$ thay vào (2) ta được $y^2 + 3y + 2 = 0$ ta có $y_1 = -1$; $y_2 = -2$

-Với $x = 1$ thay vào (2) ta được $y^2 + 2y + 1 = 0$ ta có $y_3 = -1$

Kết luận: Vậy các nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình là :

$$(0; -1); (0; -2); (1; -1)$$

Lưu ý : Nếu hệ số lũy thừa 2 của Δ bé hơn 0 ta có thể giải theo cách này. Nếu hệ số này dương ta giải theo cách sau :

Bài 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y + 3 = 0$

Hướng dẫn :

Viết phương trình đã cho về phương trình bậc hai đối với ẩn x ta được

$$x^2 + (3y - 1)x + (2y^2 - y + 3) = 0$$

$$\text{Có } \Delta = y^2 - 2y - 11$$

Điều kiện cần để phương trình có nghiệm nguyên :

$$\Delta \text{ là số chính phương } \Leftrightarrow y^2 - 2y - 11 = k^2 \ (k \in \mathbb{N})$$

$$\Leftrightarrow (y - 1)^2 - k^2 = 12 \Leftrightarrow (y - 1 + k)(y - 1 - k) = 12$$

Do $y - 1 + k$ và $y - 1 - k$ cùng tính chẵn lẻ và $y - 1 + k > y - 1 - k$ nên ta có :

$y - 1 + k$	6	-2
$y - 1 - k$	2	-6
$y - 1$	4	-4
y	5	-3

-Với $y = 5$ thay vào phương trình ta được:

$$x^2 + 14x + 48 = 0 \text{ ta có } x_1 = -8; x_2 = -6$$

-Với $y = -3$ thay vào phương trình ta được:

$$x^2 - 10x + 24 = 0 \text{ ta có } x_3 = 6; x_4 = 4$$

Kết luận: Nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình là: $(-8; 5); (-6; 5); (6; -3); (4; -3)$.

CHUYÊN ĐỀ 5

DÃY SỐ CÓ QUY LUẬT

I. DÃY TRUY HỒI – DÃY FIBONACI

Dạng 1: Cho $u_{n+1} = m.u_n$; $\forall n \geq 1$; $A \in \mathbb{R}$. Với $u_1 = a \rightarrow$ tính $u_k = ?$ ($k \in \mathbb{N}$)

Hướng dẫn:

Cách 1

* Khai báo: bấm : $a =$

bấm : $\times m = \rightarrow$ được u_2

bấm dãy lặp $= = \dots$

ta được lần lượt $u_3, u_4, \dots$

Bấm $k - 1$ lần dấu bằng được u_k

Cách 2:

Gán các giá trị: a SHIFT STO A (A chính là u_1)

1 SHIFT STO M (biến đếm)

Nhập vào máy như sau:

$M = M + 1 : A = m \times A$

Bấm $=; =; =; \dots$ để tính các giá trị u_n

Lưu ý:

– Dùng phím ALPHA để nhập các chữ M, A và các dấu “=” dấu “:”

– Cách giải này có ưu điểm là có thể kiểm soát được các bước lặp. Với mỗi giá trị M hiển thị trên màn hình tương ứng với giá trị của n trong dãy lặp.

Dạng 2: (Dãy Lucas): Cho $u_1 = a$; $u_2 = b$; $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ ($\forall n \geq 2$)

Tính u_k ? (Với $a = b = 1$ thì dãy lucas $\rightarrow$ dãy Fibonacci)

Hướng dẫn:

Cách 1

Khai báo:

Bấm: $b \text{ SHIFT STO } A + a \text{ SHIFT STO } B \rightarrow \text{được } u_3 = a + b = B$

(gán $b \rightarrow A$ tức u_2 ; $a \rightarrow B$ tức u_1)

Lắp lại dãy phím: $+ \text{ ALPHA } A \text{ SHIFT STO } A$

$+ \text{ ALPHA } B \text{ SHIFT STO } B$

Ta lần lượt thu được: $u_4; u_5 / u_6; u_7 / \dots$

(lắp lại bằng cách dùng phím Δ và dấu $=$)

Giải thích :

Sau khi bấm: $b \text{ SHIFT STO } A + a \text{ SHIFT STO } B$, được

$B = u_3 = a + b$ (đang hiển thị trên màn hình)

bấm tiếp: $+ \text{ ALPHA } A \rightarrow \text{tức } u_3 + u_2 \rightarrow \text{được } u_4$ (đang hiển thị trên màn hình)

lúc đó gán tiếp: $\text{SHIFT STO } A$ tức $u_4 \rightarrow A$

bấm tiếp: $+ \text{ ALPHA } B \rightarrow \text{tức } u_4 + u_3 \rightarrow \text{được } u_5$;

lúc đó gán tiếp: $\text{SHIFT STO } B$ tức $u_5 \rightarrow B$ (đang hiển thị trên màn hình)
tiếp tục thực hiện dãy lắp tương tự.

Cách 2:

-Dùng phím **ALPHA** nhập dãy công thức lắp sau :

$M=M+1 : A=B+C : C=B : B=A$

-Bấm phím **CALC** và gán giá trị ban đầu: $B = u_2$; $C = u_1$; $M = 2$

-Thực hiện dãy lắp bằng các bấm liên tiếp dấu “=” để tính các U_n của dãy.

-Theo dõi biến đếm M để biết giá trị U đang tính

Lưu ý: Có nhiều cách lập hệ công thức của dãy lắp; các em học sinh hãy tự mình thử tìm thêm trong mỗi dạng toán có quy luật này nhé!

Dạng 3: $u_1 = a; u_2 = b; u_{n+1} = m.u_n + p.u_{n-1} (\forall n \geq 2)$. Tìm $u_k = ?$

Hướng dẫn:

Cách 1

* Bấm: $b \text{ SHIFT STO } A \times m + p \times a \text{ SHIFT STO } B$

(lúc này: $b \rightarrow A = u_2$; $b \times A + B \times a \rightarrow B = u_3$)

*Lắp lại dãy phím sau:

$$\times m + \text{ALPHA } A \times p \text{ SHIFT STO } A \rightarrow u_4 = A$$

$$\times m + \text{ALPHA } B \times p \text{ SHIFT STO } B \rightarrow u_5 = B$$

(Thực hiện dãy lặp trên ta lần lượt thu được: $u_4; u_5 / u_6; u_7 / \dots$ dùng phím Δ và dấu $=$ để thực hiện các dãy lặp)

Cách 2: Gán trước giá trị ban đầu:

Thực hiện các phép gán:

a $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{A}$ (A chính là u_1)

b $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{B}$ (B chính là u_2)

2 $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{STO}} \boxed{M}$ (biến đếm các bước lặp)

Nhập vào máy dãy phép tính sau:

$$\boxed{M} \boxed{=} \boxed{M} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{:} \boxed{A} \boxed{=} \boxed{m} \boxed{\times} \boxed{B} \boxed{+} \boxed{p} \boxed{\times} \boxed{A} \boxed{:} \boxed{M} \boxed{=} \boxed{M} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{:} \boxed{B} \boxed{=} \boxed{m} \boxed{\times} \boxed{A} \boxed{+} \boxed{p} \boxed{\times} \boxed{B}$$

(Tức là dãy lặp: $M = M + 1 : A = m.b + p.A : M = M + 1 : B = m.A + p.B$)

-Bấm phím $\boxed{\text{CALC}}$ và gán giá trị ban đầu: $B = u_2; A = u_1; M = 2$

-Thực hiện dãy lặp bằng các bấm liên tiếp dấu “=” để tính các U_n của dãy.

-Theo dõi biến đếm M để biết giá trị U đang tính

Lưu ý:

–Dùng phím $\boxed{\text{ALPHA}}$ để nhập các chữ M, A và các dấu “=” dấu “:”

–Cách giải này có ưu điểm là có thể kiểm soát được các bước lặp. Với mỗi giá trị M hiển thị trên màn hình tương ứng với giá trị của n trong dãy lặp.

Giải thích:

–Đầu tiên máy thực hiện tính $M = M + 1$ khi đó $M = 3$ (tương ứng với u_3)

–Tiếp theo máy thực hiện tính $A = m \times B + p \times A$ lúc này $u_3 = A$

–Tiếp theo máy thực hiện tính $M = M + 1$ khi đó $M = 4$ (tương ứng với u_4)

–Tiếp theo máy thực hiện tính $B = m \times A + p \times B$ lúc này $u_4 = B$

sau đó máy lại quay lại các bước lặp trên để tìm ra các giá trị u_n tiếp theo.

Cách 3: Giá trị ban đầu nhập vào sau:

Tương tự như trên, nhập vào máy dãy phép tính sau:

$$M = M + 1 : A = m \times [B] [+] p \times A : C = A : A = B : B = C$$

- Bấm phím **CALC** và gán giá trị ban đầu: $B = u_2; M = 2$
- Thực hiện dãy lặp bằng các bấm liên tiếp dấu “=” để tính các U_n của dãy.
- Theo dõi biến đếm M để biết giá trị U đang tính

Giải thích:

Sau khi tính $A = m \times [B] [+] p \times A$ lúc này $A = u_3$

Gán $C = A = u_3$

Gán $A = B = u_2$

Gán $B = C = u_3$

Máy tính tiếp $A = m \times [B] [+] p \times A$ lúc này $A = m.u_3 + p.u_2 = u_4$

Cứ tiếp tục như vậy tính được các giá trị tiếp theo.

Cách 4: Giá trị ban đầu nhập vào sau:

Nhập vào máy: dãy lặp

$$M = M + 1 : A = m.b + p.A : M = M + 1 : B = m.A + p.B$$

- Bấm phím **CALC** và gán giá trị ban đầu: $A = u_1; B = u_2; M = 2$
- Thực hiện dãy lặp bằng các bấm liên tiếp dấu “=” để tính các U_n của dãy.
- Theo dõi biến đếm M để biết giá trị U đang tính

Giải thích:

Bấm: **CALC**

Lần lặp 1:

-Máy hỏi M ? $\rightarrow$ Nhập 2 $\rightarrow$ Màn hình hiển thị: $M = M + 1 = 3$

-Bấm tiếp “=” Máy tiếp tục hỏi: A ? $\rightarrow$ Nhập a “=” tức gán giá trị $u_1 = a$ vào A

-Màn hình hiển thị $A = m.b + p.A \rightarrow$ đây chính là giá trị U_3 đang được gán vào A

-Tiếp tục bấm “=” Máy tiếp tục hỏi B ? $\rightarrow$ Nhập b “=” tức gán giá trị $u_2 = b$ vào B

-Màn hình hiển thị: $B = m.A + p.B \rightarrow$ đây chính là giá trị U_4 đang được gán vào B

Kết thúc lần lặp 1 ta tính được U_3, U_4

Tiếp tục thực hiện dãy lặp bằng cách bấm các phím $=, =, = \dots$ để tính các giá trị U tiếp theo. Quan sát giá trị M để biết giá trị U đang tính

Cách 5: Dùng 2 phím **Ans** và **PreAns** trên máy Casio fx-580

$$u_1 = a; u_2 = b; u_{n+1} = m.u_n + p.u_{n-1} \quad (\forall n \geq 2)$$

Cách thực hiện:

-Bấm vào máy: $a =$ Bấm tiếp $b =$

lúc này a được nhớ bởi phím **PreAns**; b được nhớ vào **Ans**

Như vậy : $U_1 = a \rightarrow \text{PreAns}$; $U_2 = b \rightarrow \text{Ans}$

Nhập dãy lặp sau: $m.$ **Ans** + $p.$ **PreAns**

Thực hiện dãy lặp bằng cách bấm liên tiếp dấu “=”

Giải thích :

-Dấu “=” lần 1 $\rightarrow$ lần lặp 1: ta tính được $U_3 = m.$ **Ans** + $p.$ **PreAns**

Lúc này giá trị trên màn hình là **Ans** = U_3

Giá trị trước đó trở thành **PreAns** tức **PreAns** = U_2

-Bấm dấu “=” lần 2 $\rightarrow$ lần lặp 2 : ta tính được : $U_4 = m.$ **Ans** + $p.$ **PreAns**

Lúc này giá trị trên màn hình là **Ans** = U_4

Giá trị trước đó trở thành **PreAns** tức **PreAns** = U_3

-Tiếp tục như thế để tính các U tiếp theo

Nhận xét :

Ưu điểm : Tính và cho kết quả các giá trị U_n nhanh

Hạn chế : không kiểm soát được các giá trị U_n ; người thực hiện phải thật tỉnh táo, đếm và kiểm soát các giá trị tìm được $u_3; u_4; u_5; \dots$ trên màn hình cẩn thận vì rất dễ bị nhầm nếu đề yêu cầu tính nhiều giá trị u_k ; Một khi bị nhầm, bắt buộc phải xóa hết nhớ và làm lại từ đầu.

Lời bình: Có thể dùng cách này để tính giá trị của các biểu thức có dạng 1 dãy số có quy luật.

Áp dụng: Tính $A = 3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots + 19^2$ (dành cho học sinh)

Dạng 4: Cho $u_1 = a; u_2 = b; u_{n+1} = u_n^2 + u_{n-1}^2; (\forall n \geq 2)$. Tính u_k ?

(Fibonacci suy rộng bậc 2:)

Hướng dẫn:

Cách 1:

*Bấm phím: $b \text{ SHIFT STO } A \quad x^2 + a \quad x^2 \text{ SHIFT STO } B \rightarrow u_3 = B$

*Lặp lại dãy phím:

$$x^2 + \text{ALPHA } A \quad x^2 \text{ SHIFT STO } A \rightarrow u_4 = A$$

$$x^2 + \text{ALPHA } B \quad x^2 \text{ SHIFT STO } B \rightarrow u_5 = B$$

Lần lượt thu được: $u_4; u_5 / u_6; u_7 / \dots$

Các cách khác đã trình bày trên dạng 3, dành lại cho học sinh tự thực hiện

Dạng 5: Cho $u_1 = a; u_2 = b; u_3 = c; u_{n+1} = m.u_n + p.u_{n-1} + q.u_{n-2} (\forall n \geq 3)$. Tính u_k ?

(Fibonacci suy rộng bậc 3)

Hướng dẫn:

Cách 1:

Đưa u_2 vào A: $b \text{ [SHIFT] [STO] } A$

Đưa u_3 vào B: $c \text{ [SHIFT] [STO] } B$

Tính u_4 : $\text{[ALPHA] } B \times m + \text{ALPHA } A \times p + a \times q \text{ [SHIFT] [STO] } C$

(được $u_4 \rightarrow C$ đang hiển thị trên màn hình)

Lập lại dãy phím sau:

$$\times m + \text{[ALPHA] } B \times p + \text{ALPHA } A \times q \text{ SHIFT STO } A \rightarrow u_5 = A$$

$$\times m + \text{ALPHA } C \times p + \text{ALPHA } B \times q \text{ SHIFT STO } B \rightarrow u_6 = B$$

$$\times m + \text{ALPHA } A \times p + \text{ALPHA } C \times q \text{ SHIFT STO } C \rightarrow u_7 = C$$

Lần lượt thu được: $u_5, u_6, u_7 / u_8, u_9, u_{10} / \dots$

Các cách khác đã trình bày trên dạng 3, dành lại cho học sinh tự thực hiện

CÁC BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1: (Thi khu vực 2005) Cho dãy số $u_n = \frac{(3+\sqrt{2})^n - (3-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$. Lập công thức truy hồi để tính u_{n+2} theo u_{n+1} , u_n .

Hướng dẫn :

Cách 1:

Giả sử $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$ (*).

Với $n = 0, 1, 2, 3$ ta tính được $u_0 = 0; u_1 = 1; u_2 = 6; u_3 = 29; u_4 = 132$.

Thay vào (*) ta được hệ phương trình :
$$\begin{cases} a + c = 6 \\ 6a + b + c = 29 \\ 29a + 6b + c = 132 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -7 \\ c = 0 \end{cases}$$

Vậy $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 7u_n$

Chú ý: Với bài trên ta có thể giả sử $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ thì bài toán sẽ giải nhanh hơn.

Cách 2:

Đặt $\lambda_1 = 3 + \sqrt{2}; \lambda_2 = 3 - \sqrt{2}$ khi ấy $\lambda_1 + \lambda_2 = 6$ và $\lambda_1 \lambda_2 = 7$ chứng tỏ λ_1, λ_2 là nghiệm của phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 6\lambda - 7$ do đó ta có: $\lambda_1^2 = 6\lambda_1 - 7$ và $\lambda_2^2 = 6\lambda_2 - 7$

Suy ra: $\lambda_1^{n+2} = 6\lambda_1^{n+1} - 7\lambda_1^n$

$\lambda_2^{n+2} = 6\lambda_2^{n+1} - 7\lambda_2^n$

Vậy $\lambda_1^{n+2} - \lambda_2^{n+2} = (6\lambda_1^{n+1} - 7\lambda_1^n) - (6\lambda_2^{n+1} - 7\lambda_2^n) = 6(\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}) - 7(\lambda_1^n - \lambda_2^n)$

hay $(3 + \sqrt{2})^{n+2} - (3 - \sqrt{2})^{n+2} = 6[(3 + \sqrt{2})^{n+1} - (3 - \sqrt{2})^{n+1}] - 7[(3 + \sqrt{2})^n - (3 - \sqrt{2})^n]$

$$\Leftrightarrow \frac{(3 + \sqrt{2})^{n+2}}{2\sqrt{2}} - \frac{(3 - \sqrt{2})^{n+2}}{2\sqrt{2}} = 6 \left[\frac{(3 + \sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}} - \frac{(3 - \sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}} \right] - 7 \left[\frac{(3 + \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} - \frac{(3 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} \right]$$

tức là $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 7u_n$.

Bài 2: (Thi khu vực 2002) Cho dãy số $u_0 = 2; u_1 = 10$ và $u_{n+1} = 10u_n - u_{n-1}$ (*). Tìm công thức tổng quát u_n của dãy?

Phương trình đặc trưng của phương trình (*) là: $\lambda^2 - 10\lambda + 1 = 0$ có hai nghiệm $\lambda_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$

Vậy $u_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n = C_1 (5 + 2\sqrt{6})^n + C_2 (5 - 2\sqrt{6})^n$

Với $n = 0; 1$ ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ (5 + 2\sqrt{6})C_1 + (5 - 2\sqrt{6})C_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

Vậy số hạng tổng quát $u_n = (5 + 2\sqrt{6})^n + (5 - 2\sqrt{6})^n$.

Bài 3: Cho dãy số $u_0 = 2; u_1 = 10$ và $u_{n+1} = 10u_n - u_{n-1}$. Tính số hạng thứ u_{100} ?

Cách 1: Lập quy trình bấm phím

Cách 2: Tìm công thức tổng quát ta được: $u_n = (5 + 2\sqrt{6})^n + (5 - 2\sqrt{6})^n$.

Thay $n = 100$ để tính

Với cách này, học sinh tìm hiểu thêm chuyên đề: phương trình Sai phân được trình bày trong tài liệu này

Nhận xét: Như vậy cách 2 sẽ nhanh và chính xác hơn nhiều so với cách 1 nhưng sẽ mất thời gian để tìm ra công thức tổng quát. Do đó nếu số hạng cần tính là nhỏ thì ta dùng cách 1, còn lớn ta sẽ dùng cách 2.

Bài 4: Cho dãy số $\{U_n\}$ thỏa mãn:
$$\begin{cases} U_{n+1} = 2U_n - 1 + 3n (\forall n \in \mathbb{N}^*) \\ U_1 = 2 \end{cases}$$

a) Tính **b) $u_{11} - u_1 + u_{12} - u_2 + \dots + u_{20} - u_{10}$** **c) Tìm n để** **d) $u_n > 10^6$**

Hướng dẫn:

a) Viết dãy số đã cho về dạng:

$$\begin{aligned} u_{n+1} + 3(n+1) + 2 &= 2(u_n + 3n + 2) \Rightarrow u_n + 3n + 2 = 2(u_{n-1} + 3(n-1) + 2) \\ &= \dots = 2^{n-1}(u_1 + 3 \cdot 1 + 2) = 7 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow u_n = 7 \cdot 2^{n-1} - 3n - 2 \\ \Rightarrow u_{11} - u_1 + u_{12} - u_2 + \dots + u_{20} - u_{10} &= 7325403 \end{aligned}$$

b) Nhận xét: vì $U_{n+1} = 2U_n - 1 + 3n (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ nên khi n tăng thì u_n tăng

$$\text{Ta có: } u_n > 10^6 \Leftrightarrow 7 \cdot 2^{n-1} - 3n - 2 - 10^6 > 0$$

$$\text{Do đó ta có quy trình: } 1 \rightarrow A; A = A + 1; B = 7 \cdot 2^{A-1} - 3A - 2 - 10^6$$

Bấm **CALC** và thực hiện bấm liên tiếp các dấu “=” để tính

Từ đó tìm được: $n \geq 19$

Bài 5: Cho dãy số:
$$v_n = \frac{1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2}} + \frac{1}{\sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{u_{n-1}} + \sqrt{u_n}}$$

trong đó: $u_1 = 1; u_n = u_{n-1} + 2 (\forall n > 1)$.

a. Tìm công thức tính v_n theo $n (\forall n > 1)$.

b. Tính giá trị $v_{2010} =$

Hướng dẫn:

a) Tóm tắt tìm công thức tính v_n theo n :

Từ giả thiết có: $u_n - u_{n-1} = 2 \forall n > 1$. Từ đó có:

$$v_n = \frac{\sqrt{u_2} - \sqrt{u_1}}{u_2 - u_1} + \frac{\sqrt{u_3} - \sqrt{u_2}}{u_3 - u_2} + \dots + \frac{\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-1}}}{u_n - u_{n-1}} = \frac{\sqrt{u_n} - \sqrt{u_1}}{2} (*)$$

Mặt khác: $u_2 - u_1 = 2, u_3 - u_2 = 2, \dots, u_{n-1} - u_{n-2} = 2, u_n - u_{n-1} = 2$, cộng vế với vế của

$n-1$ đẳng thức trên, giản ước ta có: $u_n = 2n - 1$ thay vào (*) được: $v_n = \frac{\sqrt{2n-1} - 1}{2}$.

b) $v_{2010} = 2009$.

CÁC BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1 Tính 10 số hạng đầu của dãy số (u_n) cho bởi:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]; n = 1, 2, 3, \dots$$

Bài 2: Tìm 20 số hạng đầu của dãy số (u_n) cho bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Bài 3: Cho dãy số được xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = \sqrt[3]{3} \\ u_{n+1} = (u_n)^{\sqrt[3]{3}}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$
. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để u_n là số nguyên.

Bài 4: Tính số hạng thứ 10 của dãy $u_1 = u_2 = 1; u_3 = 2; u_{n+1} = u_n + u_{n-1} + u_{n-2}$

Bài 5: Cho dãy $u_1 = 8, u_2 = 13, u_{n+1} = 3u_n + 2u_{n-1} + \frac{1}{n} (n \geq 2)$

a. Tính u_7 ?

ĐS: $u_7 = 8717,92619$

Bài 6: (Thi khu vực, 2001, lớp 9) Cho dãy $u_1 = 144; u_2 = 233; u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$

a. Lập một qui trình bấm phím để tính u_{n+1} .

b. Tính chính xác đến 5 chữ số sau dấu phẩy các tỉ số $\frac{u_2}{u_1}; \frac{u_3}{u_2}; \frac{u_4}{u_3}; \frac{u_6}{u_5}$

Bài 7: (Thi khu vực, 2003, lớp 9) Cho dãy $u_1 = 2; u_2 = 20; u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$.

a. Tính $u_3; u_4; u_5; u_6; u_7$.

b. Viết qui trình bấm phím để tính u_n .

c. Tính giá trị của $u_{22}; u_{23}; u_{24}; u_{25}$.

Bài 8: (Thi khu vực, 2003, lớp 9 dự bị) Cho dãy số $u_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$

a. Tính 8 số hạng đầu tiên của dãy.

b. Lập công thức truy hồi để tính u_{n+2} theo u_{n+1} và u_n .

c. Lập một qui trình tính u_n .

d. Tìm các số n để u_n chia hết cho 3.

Bài 9: (Thi khu vực, 2003, lớp 9 dự bị) Cho $u_0 = 2; u_1 = 10; u_{n+1} = 10u_n - u_{n-1}$.

a. Lập một quy trình tính u_{n+1}

b. Tính $u_2; u_3; u_4; u_5, u_6$

c. Tìm công thức tổng quát của u_n .

Bài 10: (Thi vô địch toán Leningrat, 1967) Cho dãy $u_1 = u_2 = 1; u_{n+1} = u_n^2 + u_{n-1}^2$. Tìm số dư của u_n chia cho 7.

Bài 11: (Tập chí toán học & tuổi trẻ, tháng 1.1999) Cho $u_1 = 1; u_2 = 3, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_{n+1}$. Chứng minh: $A = 4u_n \cdot u_{n+2} + 1$ là số chính phương.

Bài 12: (Olympic toán Singapore, 2001) Cho $a_1 = 2000, a_2 = 2001$ và $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3$ với $n = 1, 2, 3, \dots$. Tìm giá trị a_{100} ?

Bài 13: (Tập chí toán học & tuổi trẻ, tháng 7.2001) Cho dãy số u_n được xác định bởi: $u_1 = 5; u_2 = 11$ và $u_{n+1} = 2u_n - 3u_{n-1}$ với mọi $n = 2, 3, \dots$. Chứng minh rằng:

a. Dãy số trên có vô số số dương và số âm.

b. u_{2002} chia hết cho 11.

Bài 14: Dãy u_n được xác định bởi: $u_0 = 1, u_1 = 2$ và $u_{n+2} = \begin{cases} u_{n+1} + 9u_n, & n = 2k \\ 9u_{n+1} + 5u_n, & n = 2k+1 \end{cases}$ với mọi $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Chứng minh rằng:

a. $\sum_{k=1995}^{2000} u_k^2$ chia hết cho 20

b. u_{2n+1} không phải là số chính phương với mọi n .

(Thi giỏi toán, 1995)

Bài 15: (Sở GD Lâm Đồng, 2005) Cho $u_1 = u_2 = 7; u_{n+1} = u_1^2 + u_{n-1}^2$. Tính $u_7 = ?$

Bài 16: Cho dãy $u_1 = u_2 = 11; u_3 = 15; u_{n+1} = \frac{5u_n^2}{3 + u_{n-1}} - \frac{u_{n-1}}{2 + u_n}$ với $n \geq 3$

a. Lập quy trình bấm phím để tìm số hạng thứ u_n của dãy?

b. Tìm số hạng u_8 của dãy?

Bài 17: Cho dãy $u_1 = 5; u_2 = 9; u_{n+1} = 5u_n + 4u_{n-1} (n \geq 2)$.

a. Lập quy trình bấm phím để tìm số hạng thứ u_n của dãy?

b. Tìm số hạng u_{14} của dãy?

Bài 18: (Thi khu vực 2002, lớp 9) Cho dãy số xác định bởi công thức $x_{n+1} = \frac{4x_n^2 + 5}{x_n^2 + 1}$, n là số tự nhiên, $n \geq 1$. Biết $x_1 = 0,25$. Viết qui trình ấn phím tính x_n ? Tính x_{100} ?

II. CẤP SỐ - DÃY SỐ CÓ QUY LUẬT :

1) Cấp số cộng :

+**Định nghĩa:** $u_{n+1} = u_n + d$, với d là công sai

+**Số hạng tổng quát:** $u_n = u_1 + (n-1)d$

Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}$$

Chứng minh :

$$\begin{aligned} 2S_n &= (u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n) + (u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n) \\ &= (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + \dots + (u_{n-1} + u_2) + (u_n + u_1) \end{aligned}$$

Xét mỗi số hạng (mỗi ngoặc) trong tổng trên ta thấy chúng luôn bằng $(u_1 + u_n)$ (n ngoặc)

Cụ thể 1 số hạng: $(u_2 + u_{n-1}) = (u_1 + d) + (u_n - d) = u_1 + u_n$

Như vậy: $2S_n = n(u_1 + u_n)$

$$\text{Hay: } S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}$$

+**Tính chất:** các số hạng của cấp số cộng: $U_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$

+**Định lí:** Cho các số nguyên dương m và k với $m \geq k$ thì: $u_m = u_k + (m - k)d$.

+**Định lí:** Nếu $a + b = c + d$ thì $u_a + u_b = u_c + u_d$;

Ví dụ: có $2 + 4 = 5 + 1$ thì $u_2 + u_4 = u_5 + u_1$.

2) Cấp số nhân:

+**Định nghĩa:** $u_{n+1} = u_n \cdot q$, với q là công bội.

+**Số hạng tổng quát:** $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ với $n \geq 2$

Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Chứng minh :

$$q \cdot S_n = q \cdot u_1 + q \cdot u_2 + q \cdot u_3 + \dots + q \cdot u_n = u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1}$$

$$\text{Do đó: } S_n - q \cdot S_n = u_1 - u_{n+1} = u_1 - u_1 \cdot q^n = u_1(1 - q^n)$$

$$\text{Từ đó suy ra: } S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

+**Tính chất :** các số hạng của cấp số nhân: $u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}$

+**Định lí:** Cho các số nguyên dương m và k với $m \geq k$ thì $u_m = u_k \cdot q^{m-k}$

+**Định lí:** Cho cấp số nhân với $q \neq 0$ và $u_1 \neq 0$ thì $u_{m+k} = u_m \cdot q^k$

Ví dụ: ta có $6 = 4 + 2$ thì $u_6 = u_4 \cdot q^2$.

BÀI TẬP

$$\text{Bài 1: Tổng: } S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Hướng dẫn:

Đây là cấp số cộng công sai $d = 1$

$$\text{Bài 2: Tổng: } S_2 = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + (n-1).n = \frac{(n-1).n.(n+1)}{3}$$

Hướng dẫn:

$$3S_2 = 3 \cdot [1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + (n-1).n]$$

$$3S_2 = [1.2.(3-0) + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \dots + (n-1).n.\{(n+1)-(n-2)\}]$$

$$3S_2 = (1.2.3 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + \dots + (n-1).n.(n+1) - (n-2)(n-1).n)$$

$$3S_2 = (n-1).n.(n+1)$$

$$S_2 = \frac{(n-1).n.(n+1)}{3}$$

Bài 3: Tổng: $S_3 = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + (n-2)(n-1).n = \frac{(n-2)(n-1).n.(n+1)}{4}$

Hướng dẫn:

(Trương tự cách khai thác trên ta tính $4S$ rồi khai triển, rút gọn ra công thức này)

Bài 4: Tổng: $S_4 = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} = 1 - \frac{1}{n}$

Hướng dẫn:

Ta có công thức chung : $\frac{a}{n(n+a)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+a}$

$$S_4 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

Bài 5: Tổng: $S_5 = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{(n-2).(n-1).n} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2.(n-1).n}$

Hướng dẫn:

Ta có công thức tổng quát:

$$\frac{a}{n(n+a)(n+b)} = \frac{1}{n(n+b)} - \frac{1}{(n+b)(n+a)} \text{ hoặc}$$

$$\frac{b}{n(n+a)(n+b)} = \frac{1}{n(n+a)} - \frac{1}{(n+a)(n+b)}$$

Áp dụng vào bài:

$$\frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \text{ hay: } \frac{2}{1.2.3} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}$$

$$S_5 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(n-2)(n-1)} - \frac{1}{(n-2)n} \right)$$

$$S_5 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n-2)n} \right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n-2)n}$$

Lưu ý: Mở rộng công thức trên ta có:

$$\frac{4}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

VD: $\frac{4}{1.2.3.4.5} = \frac{1}{1.2.3.4} - \frac{1}{2.3.4.5}$

Vận dụng tính tổng sau:

$$M = \frac{3}{1.2.3.4.5} + \frac{3}{2.3.4.5.6} + \frac{3}{3.4.5.6.7} + \dots + \frac{3}{2011.2012.2013.2014.2015}$$

$$\text{ĐS: } M = \frac{49309150742208}{157789303752960}$$

$$\text{Bài 6: Tổng: } S_6 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$$

Hướng dẫn:

$$S_6 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = 1.(2-1) + 2.(3-1) + 3.(4-1) + \dots + n.[(n+1)-1]$$

$$S_6 = [1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n.(n+1)] - (1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

Theo S_2 ta có:

$$S_2 = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n.(n+1) = \frac{n.(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\text{Vậy } S_6 = S_2 - S_1 = \frac{n.(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$$

$$\text{Bài 7: Tổng: } S_7 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n.(n+1)}{2} \right]^2$$

Hướng dẫn:

$$S_7 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = 1^2.(2-1) + 2^2.(3-1) + 3^2.(4-1) + \dots + n^2.[(n+1)-1]$$

$$= (1^2.2 + 2^2.3 + 3^2.4 + \dots + n^2.(n+1)) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$$

$$= [(0+1).1.2 + (1+1).2.3 + (2+1).3.4 + \dots + \{(n-1)+1\}.n.(n+1)] - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$$

$$= [0.1.2 + 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + (n-1).n.(n+1)] + [1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n.(n+1)] - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$$

$$\text{Ta đã có: } S_2 = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n.(n+1) = \frac{n.(n+1)(n+2)}{3}$$

$$S_3 = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + (n-1).n.(n+1) = \frac{(n-1).n.(n+1).(n+2)}{4}$$

$$S_6 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$$

$$\text{Vậy } S_7 = S_3 + S_2 - S_6 = \left[\frac{n.(n+1)}{2} \right]^2$$

$$\text{Bài 8: Tính tổng } A = 3 + 33 + 333 + 3333 + \dots + \underbrace{333\dots333}_{100 \text{ chu số } 3}$$

Hướng dẫn:

$$S = \frac{1}{3}(9 + 99 + 999 + \dots + 999\dots999) = \frac{1}{3}[(10-1) + (100-1) + (1000-1) + \dots + (10^{100}-1)]$$

$$= \frac{1}{3} \left(10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{100} - \left(\underbrace{1+1+1+\dots+1}_{100 \text{ số hạng}} \right) \right) = \frac{1}{3}(10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{100} - 100)$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{10(1-10^{100})}{1-10} - 100 \right] = \frac{1}{3} \left(\frac{10^{100}-10}{9} - 100 \right) = \frac{10^{100}-10}{27} - \frac{100}{3}$$

Lưu ý: $10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{100}$ là cấp số nhân, công bội 10. AD công thức: $\frac{u_1(1-q^n)}{1-q}$

Với: $u^1 = 10, q = 10$

Tương tự: $M = 7 + 77 + 777 + 7777 + \dots + 77\dots777$ (có 2018 số hạng)

Hướng dẫn:

$$\begin{aligned}
 M &= 7 + 77 + 777 + 7777 + \dots + 77\dots777 \text{ (có 2018 số hạng)} \\
 &= 7(1 + 11 + 111 + \dots + 111\dots111) \\
 &= \frac{7}{9}(9 + 99 + 999 + \dots + 999\dots999) \\
 &= \frac{7}{9}((10-1) + (100-1) + \dots + (10^{2018}-1)) \\
 &= \frac{7}{9}((10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{2018}) - 2018)
 \end{aligned}$$

$10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{2018}$ là cấp số nhân, công bội 10. AD công thức: $\frac{u_1(1-q^n)}{1-q}$

Với: $u^1 = 10$, $q = 10$, $n = 2018$, ta được :

$$10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{2018} = \frac{10(1-10^{2018})}{1-10} = \frac{10^{2019} - 10}{9}$$

$$M = \frac{7}{9} \left(\frac{10^{2019} - 10}{9} - 2018 \right)$$

Bài tập tương tự:

$$B = 7 + 77 + 777 + \dots + 777\dots777$$

17 số 7

$$\text{ĐS: } \frac{7}{9} \left(\frac{10^{18} - 10}{9} - 17 \right) \approx 8,641975309 \cdot 10^{16}$$

$$C = 25 + 255 + 2555 + \dots + 2555\dots555$$

15 số 5

Hướng dẫn:

$$C = 25 + 255 + 2555 + \dots + 2555\dots555$$

15 số 5

$$= (20 + 200 + \dots + 200\dots000) + (5 + 55 + 555 + \dots + 555\dots555)$$

15 số 0

15 số 5

$$= 2 \cdot \frac{10^{16} - 10}{9} + \frac{5}{9} \left(\frac{10^{16} - 10}{9} - 15 \right) \approx 2,839506173 \cdot 10^{15}$$

$$D = 2 + 22 + 222 + \dots + 222\dots222$$

17 số 2

$$\text{ĐS: } \frac{2}{9} \left(\frac{10^{18} - 10}{9} - 17 \right) \approx 2,469135802 \cdot 10^{16}$$

$$E = 34 + 344 + 3444 + \dots + 3444\dots444$$

15 số 4

$$\text{ĐS: } 3 \cdot \frac{10^{16} - 10}{9} + \frac{4}{9} \left(\frac{10^{16} - 10}{9} - 15 \right) \approx 2,827160494 \cdot 10^{15}$$

Bài 9: Cho hàm số $f(x) = 4^x (4^x + 2)^{-1}$.

Tính tổng: $S = f\left(\frac{1}{2010}\right) + f\left(\frac{2}{2010}\right) + f\left(\frac{3}{2010}\right) + \dots + f\left(\frac{2009}{2010}\right)$

(Trích đề thi HSG MTCT, Bộ GD 2010)

Hướng dẫn:

Ta chứng minh được: $f(x) + f(1-x) = 1$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2010}\right) + f\left(1 - \frac{1}{2010}\right) = 1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2010}\right) + f\left(\frac{2009}{2010}\right) = 1$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{2}{2010}\right) + f\left(1 - \frac{2}{2010}\right) = 1 \Rightarrow f\left(\frac{2}{2010}\right) + f\left(\frac{2008}{2010}\right) = 1$$

Do S có 2009 số hạng nên có 1004 cặp như trên và có dư số hạng:

$$f\left(\frac{1005}{2010}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 4^{\frac{1}{2}} \left(4^{\frac{1}{2}} + 2\right)^{-1} = 2(2+2)^{-1} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Do đó: $S = 1004 + f\left(\frac{1005}{2010}\right) = 1004 + \frac{1}{2} = \frac{2009}{2}$

Thật vậy: $f(1-x) = 4^{1-x} (4^{1-x} + 2)^{-1} = \dots = 2(4^x + 2)^{-1}$
 $\Rightarrow f(x) + f(1-x) = 4^x (4^x + 2)^{-1} + 2(4^x + 2)^{-1} = (4^x + 2)^{-1} (4^x + 2) = 1$

III. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ PHÉP LẬP:

Bài 1: Tính giá trị của các biểu thức sau: $A = 1 + \sum_{x=1}^{20} 0,2012^x$

Hướng dẫn:

Cách 1: Lập công thức truy hồi: Nhập M=M+1: A=A+(0,2012)^M

Bấm: CALC nhập 0 = 1 = (Nhập các giá trị ban đầu cho M và A; Vì lúc này trên màn hình hỏi: M? và A?)

Nhấn đến khi M + 1 = 20, ta được kết quả: A =

Cách 2: Trên máy cổ sẵn công thức tính $A = 1 + \sum_{x=1}^{20} 0,2012^x$ mà ta chỉ cần nhập đúng như đề để tính

Bài 2: Tính 123 + 123123 + 123123123 + ... + 123...123 (20 nhóm 123)

Hướng dẫn:

Ta xây dựng dãy lập như sau: M=M+1: A = A.1000 + 123: B = B + A

Bài 3: Tìm tổng các ước lẻ của số 804257792

Hướng dẫn:

–Tìm ước là lũy thừa của 2: Ghi vào máy dãy lập: A = A + 1: 804257792 ÷ 2^A ấn bằng đến khi A = 20 máy hiện thương là 767 thì dừng (767 là số lẻ).

Suy ra số 804257792 phân tích được 2²⁰.767.

Do vậy 767 là một ước lẻ của 804257792.

–Tìm các ước lẻ của 767: Ghi vào màn hình: A + 1 : 767 ÷ (2A+1) ấn = lần lượt, ta tìm thêm được 2 ước lẻ là 59; 13. (Vì 59 x 13 = 767 nên không còn ước lẻ nào khác lớn hơn 1)

–Suy ra số 804257792 có 4 ước số lẻ là: 767; 59; 13; 1

–Tổng các ước lẻ là: 767 + 59 + 13 + 1 = 840.

Bài 4: Tính tổng: $S = \frac{1}{2.3} - \frac{2}{3.4} + \dots + \frac{99}{100.101} - \frac{100}{101.102}$

Hướng dẫn:

Lập công thức: $D=D+1: A = A + (-1)^{D+1} \cdot \frac{D}{(D+1)(D+2)}$

Đưa giá trị ban đầu: $A=0; D=1$ và thực hiện dãy lặp đến khi $D=D+1=100$ ta có kết quả: **$A=0,07461166509$**

Cách 2: Sử dụng công thức: $\sum_{X=1}^{100} \frac{(-1)^{X+1} X}{(X+1)X+2}$

Bài 5: Tính

a) $A = \left(\frac{1}{21} - 1\right) \left(\frac{1}{22} - 1\right) \left(\frac{1}{23} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2016} - 1\right)$

b) $B = \frac{1}{1-2} + \frac{2}{2-3} + \frac{3}{3-4} + \dots + \frac{2015}{2015-2016}$

c) $C = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2015}+\sqrt{2016}}$

d) $D = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2009}+\sqrt{2011}}$

e) $E = \frac{1}{\sqrt{1003}+\sqrt{1001}} + \frac{1}{\sqrt{1005}+\sqrt{1003}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2015}+\sqrt{2013}}$

Hướng dẫn:

a) Cách 1:

$$A = \left(\frac{1}{21} - 1\right) \left(\frac{1}{22} - 1\right) \left(\frac{1}{23} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2016} - 1\right) = \frac{-20}{21} \cdot \frac{-21}{22} \dots \frac{-2015}{2016} = \frac{20}{2016}$$

Cách 2: $\prod_{X=21}^{2016} \left(\frac{1}{X} - 1\right)$

b) Cách 1:

$$B = \frac{1}{1-2} + \frac{2}{2-3} + \frac{3}{3-4} + \dots + \frac{2015}{2015-2016} = -(1+2+3+\dots+2015)$$

Cách 2: $\sum_{X=1}^{2015} \left(\frac{X}{X-(X+1)}\right) = -2031120$

c) Cách 1: Sử dụng công thức: $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Cách 2: $\sum_{X=1}^{2015} \frac{1}{\sqrt{X}+\sqrt{X+1}} \approx 43,89989$

d) Cách 1: Trục căn thức ở mẫu các phân thức ta được

$$D = \frac{1}{2} (\sqrt{3} - 1 + \sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{7} - \sqrt{5} + \dots + \sqrt{2011} - \sqrt{2009}) = \frac{\sqrt{2011} - 1}{2} \approx 21,92209$$

e) Cách 1:

Sử dụng công thức: $\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{2}$

$$E = \frac{1}{\sqrt{1003} + \sqrt{1001}} + \frac{1}{\sqrt{1005} + \sqrt{1003}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2015} + \sqrt{2013}} \approx 13,25017$$

Cách 2: Dùng công thức: $\sum_{X=501}^{1007} \frac{1}{\sqrt{2X+1} + \sqrt{2X-1}}$

LÊ XUÂN HỒNG

CHUYÊN ĐỀ 6 PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN

1. Phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất bậc 2:

Định nghĩa: Phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất bậc hai với hệ số là hằng số có dạng: $ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$ (*); với $n = 0; 1; 2; \dots$ trong đó $a \neq 0$; b, c là hằng số.

Nghiệm tổng quát:

Nếu $c = 0$ thì phương trình (*) có dạng: $ax_{n+2} + bx_{n+1} = 0 \Leftrightarrow x_{n+2} = -\frac{b}{a}x_{n+1} = \lambda x_{n+1}$ có nghiệm tổng quát $x_{n+1} = \lambda^n x_1$.

Nếu phương trình (*) có phương trình đặc trưng là $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ có hai nghiệm λ_1, λ_2 thì việc tìm nghiệm dựa vào các mệnh đề sau:

Mệnh đề 1: Giả sử hai nghiệm của phương trình đặc trưng là phân biệt ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) khi ấy phương trình (*) có nghiệm tổng quát là: $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ trong đó C_1, C_2 là những số bất kỳ gọi là hằng số tự do và được xác định theo điều kiện ban đầu x_0, x_1 .

Ví dụ 1: Tìm nghiệm của phương trình sai phân: $u_0 = 7; u_1 = -6; u_{n+2} = 3u_{n+1} + 28u_n$.

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 3\lambda - 28 = 0$ có hai nghiệm $\lambda_1 = -4; \lambda_2 = 7$. Vậy nghiệm tổng quát có dạng: $u_n = C_1(-4)^n + C_27^n$.

Với $n = 0$ ta có: $C_1 + C_2 = 7 (= x_0)$

Với $n = 1$ ta có: $-4.C_1 + 7C_2 = -6 (= x_1)$

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} C_1 + C_2 = 7 \\ -4.C_1 + 7C_2 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 5 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát phương trình có dạng: $u_n = 5.(-4)^n + 2.7^n$

Mệnh đề 2: Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm kép $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{a}$ thì nghiệm tổng quát của phương trình (*) có dạng: $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2n\lambda_1^n = (C_1 + C_2n)\lambda_1^n$ trong đó C_1, C_2 là hằng số tự do và được xác định theo điều kiện ban đầu x_0, x_1 .

Ví dụ 2: Tìm nghiệm phương trình sai phân: $u_0 = -1; u_1 = 2; u_{n+2} = 10u_{n+1} - 25u_n$.

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$ có hai nghiệm $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$. Vậy nghiệm tổng quát có dạng: $u_n = (C_1 + C_2n)5^n$.

Với $n = 0$ ta có: $C_1 = -1$

$$\text{Với } n = 1 \text{ ta có: } (C_1 + C_2).5 = 2 \Rightarrow C_2 = \frac{7}{5}$$

Vậy nghiệm tổng quát phương trình có dạng: $u_n = (-1 + \frac{7}{5}n)5^n$

Mệnh đề 3: Nếu phương trình đặc trưng không có nghiệm thực thì nghiệm tổng quát của phương trình (*) có dạng: $x_n = r^n (C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi)$ trong đó $r = \sqrt{A^2 + B^2}; \varphi = \arctg \frac{B}{A};$

$A = -\frac{b}{2a}; B = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}; C_1, C_2$ là hằng số tự do xác định theo điều kiện ban đầu x_0, x_1 .

Ví dụ 3: Tìm nghiệm của phương trình sai phân: $u_0 = 1; u_1 = \frac{1}{2}; u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ có hai nghiệm phức $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $A = \frac{1}{2}; B = \frac{\sqrt{3}}{2}; r = 1; \varphi = \frac{\pi}{3}$

Vậy nghiệm tổng quát có dạng: $u_n = C_1 \cos \frac{n\pi}{3} + C_2 \sin \frac{n\pi}{3}$.

Với $u_0 = 1; u_1 = \frac{1}{2}$ thì $C_1 = 1$ và $C_1 \cos \frac{\pi}{3} + C_2 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow C_2 = 0$.

Vậy nghiệm tổng quát có dạng: $u_n = \cos \frac{n\pi}{3}$.

Bài tập tự luyện:

Tìm nghiệm u_n của các phương trình sau:

- $u_0 = 8; u_1 = 3; u_{n+2} = 12u_n - u_{n+1}$
- $u_0 = 2; u_1 = -8; u_{n+2} + 8u_{n+1} - 9u_n = 0$
- $u_0 = 1; u_1 = 16; u_{n+2} - 8u_{n+1} + 16u_n = 0$

Ví dụ 4: Cho dãy $u_0 = u_1 = 1; u_n = \frac{u_{n-1}^2 + 2}{u_{n-2}}; \forall n \geq 3$. Tìm dạng tuyến tính của dãy đã cho?

Gọi số hạng tổng quát của dãy có dạng: $u_n = au_{n-1} + bu_{n-2} + c$ (*)

Cho $n = 1; 2; 3$ ta được $u_3 = 3; u_4 = 11; u_5 = 41$

Thay vào (*) ta được hệ:
$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ 3a + b + c = 11 \\ 11a + 3b + c = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases}$$

Vậy $u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}$

Chú ý: Ta có thể dùng phương pháp qui nạp để chứng minh công thức trên.

Ví dụ 5: Cho dãy $u_0 = \frac{1}{2}; u_1 = \frac{1}{3}; u_n = \frac{u_{n-1}u_{n-2}}{3u_{n-2} - 2u_{n-1}}; \forall n \geq 2$. Tìm công thức tổng quát của dãy.

Ta thấy $u_n \neq 0$ (với mọi n) vì nếu $u_n = 0$ thì $u_{n-1} = 0$ hoặc $u_{n-2} = 0$ do đó $u_2 = 0$ hoặc $u_1 = 0$. Vô lí.

Đặt $v_n = \frac{1}{u_n}$ khi ấy $v_n = 3v_{n-1} - 2v_{n-2}$ có phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ có nghiệm $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2$.

Công thức nghiệm tổng quát: $v_n = C_1 + C_2 \cdot 2^n$. Với $n = 0; 1$ ta có: $C_1 = 1; C_2 = \frac{1}{2}$.

Vậy $v_n = 1 + 2^{n-1}$ hay $u_n = \frac{1}{1 + 2^{n-1}}$

Ví dụ 6: Cho dãy $u_0 = 2; u_1 = 6 + \sqrt{33}; u_{n+1} - 3u_n = \sqrt{8u_n^2 + 1}; \forall n \geq 2$. Tìm công thức tổng quát của dãy.

Bình phương hai vế phương trình đã cho ta có: $u_{n+1}^2 - 6u_{n+1} \cdot u_n + u_n^2 = 1$.

Thay $n + 1$ bởi n ta được: $u_n^2 - 6u_n \cdot u_{n-1} + u_{n-1}^2 = 1$.

Trừ từng vế của hai phương trình trên ta được: $(u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n+1} - 6u_n + u_{n-1}) = 0$

Do $u_{n+1} - 3u_n = \sqrt{8u_n^2 + 1}$ nên $u_{n+1} > 3u_n > 9u_{n-1} > u_{n-1}$

Suy ra $u_{n+1} - 6u_n + u_{n-1} = 0$ có phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$ có nghiệm $\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{8}$

Công thức nghiệm tổng quát $u_n = C_1(3 + \sqrt{8})^n + C_2(3 - \sqrt{8})^n$

Từ các giá trị ban đầu suy ra: $C_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{66}}{8}$

Vậy số hạng tổng quát: $u_n = \frac{(8 + \sqrt{66})(3 + \sqrt{8})^n + (8 - \sqrt{66})(3 - \sqrt{8})^n}{8}$

LÊ XUÂN HỒNG

CHUYÊN ĐỀ 7

ĐA THỨC – CÁC DẠNG TOÁN VỀ ĐA THỨC

I. CÁC ĐỊNH NGHĨA:

1) Đa thức một ẩn $P(x)$ bậc n là đa thức có dạng: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

Trong đó: $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ là các hằng số cho trước và $(a_n \neq 0)$ được gọi là các hệ số của đa thức. a_n gọi là hệ số cao nhất và a_0 gọi là hệ số tự do.

Người ta dùng $\deg P(x)$ để kí hiệu bậc của đa thức $P(x)$

2) Số x_0 được gọi là nghiệm của đa thức $P(x)$ nếu $P(x_0) = 0$

3) Cho hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$. Ta nói rằng $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$ nếu tồn tại đa thức $h(x)$ sao cho $P(x) = h(x).Q(x)$. Khi đó đa thức $Q(x)$ là ước của đa thức $P(x)$.

4) Hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ được gọi là nguyên tố cùng nhau nếu $P(x)$ và $Q(x)$ không có ước chung bậc dương

5) Cho k là một số nguyên dương. Số x_0 được gọi là nghiệm bội k của đa thức $P(x)$ nếu như đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $(x - x_0)^k$ nhưng không chia hết cho đa thức $(x - x_0)^{k+1}$

6) Đa thức nguyên thủy là đa thức với hệ số nguyên và các hệ số của nó là nguyên tố cùng nhau.

II. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA ĐA THỨC

Mệnh đề 1: Giả sử $P(x)$ và $Q(x)$ là hai đa thức tùy ý. Đặt $h(x) = P(x) + Q(x)$. Khi đó $h(x)$ cũng là đa thức và

$$\deg h(x) = \max \{ \deg P(x), \deg Q(x) \} \text{ nếu } \deg P(x) \neq \deg Q(x)$$

$$\deg h(x) \leq \max \{ \deg P(x), \deg Q(x) \} \text{ nếu } \deg P(x) = \deg Q(x)$$

Mệnh đề 2: Giả sử $P(x)$ và $Q(x)$ là hai đa thức tùy ý. Đặt $h(x) = P(x).Q(x)$. Khi đó $h(x)$ cũng là đa thức và nếu $P(x) \neq 0; Q(x) \neq 0$ thì $\deg h(x) = \deg P(x) + \deg Q(x)$.

Mệnh đề 3: Giả sử $P(x) = h(x).Q(x)$, trong đó $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức với hệ số hữu tỉ và $Q(x) \neq 0$ thì $h(x)$ cũng là đa thức với hệ số hữu tỉ

Mệnh đề 4: (Định lý Bezout) Số x_0 là nghiệm của đa thức $P(x) \Leftrightarrow P(x) : (x - x_0)$

Hệ quả: Mọi đa thức $P(x)$ bậc n ($n \geq 1$) không thể có quá n nghiệm

-Nếu đa thức $P(x)$ bậc không quá n lại có $n+1$ nghiệm thì tất cả các hệ số của nó bằng 0.

Mệnh đề 5: Nếu đa thức $f(x)$ là đa thức nguyên và $a; b$ là hai số nguyên phân biệt thì $f(a) - f(b) : (a - b)$

Mệnh đề 6: (Định lý Viète):

Đa thức bậc ba: Cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (2)

Giả sử x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của (2). Khi đó ta có:

$$S = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \quad P = x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3 = \frac{c}{a} \quad Q = x_1.x_2.x_3 = -\frac{d}{a}$$

-Nếu (2) có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thì khi đó ta có:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

*Nếu: $a + b + c + d = 0 \Rightarrow (2)$ có 1 nghiệm: $x_1 = 1$

*Nếu $a - b + c - d = 0$ (2) có một nghiệm $x_1 = -1$

-Nếu α là 1 nghiệm của (2) thì: $(2) \Leftrightarrow (x - \alpha)g(x) = 0$ trong đó $g(x)$ là 1 đa thức bậc 2

$$\text{-Nếu có: } P = x + y + z; \quad S = xy + xz + yz; \quad Q = xyz$$

Khi đó: $x; y; z$ là nghiệm của phương trình: $X^3 - PX^2 + SX - Q = 0$

-Nếu $x_1; x_2; x_3$ là 3 nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ và nếu đặt

$$S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n \text{ thì ta có hệ thức: } aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} + dS_{n-3} = 0$$

Đa thức bậc n: Giả sử đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ có các nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n$. Khi đó ta có các đẳng thức sau:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-3}}{a_n}$$

...

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Mệnh đề 7: (Định lý Viète đảo) Nếu như các số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn hệ:

$$S_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}, \quad k = 1, n$$

Khi đó $x_1, x_2, \dots, x_n$ là n nghiệm của đa thức bậc n: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

Mệnh đề 8: (Định lý về nghiệm hữu tỉ của đa thức với hệ số nguyên).

Cho đa thức: $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ ($a_i \in \mathbb{Z}, a_0 \neq 0$)

– Nếu phân số $\frac{p}{q}$; $(p, q) = 1$ là nghiệm của $f(x)$ thì khi đó $p \mid a_n$ và $q \mid a_0$

– Giả sử α là nghiệm của $f(x)$, nếu $\alpha \neq \pm 1$, khi đó: $\frac{f(1)}{1-\alpha}$ và $\frac{f(-1)}{1+\alpha}$ là các số nguyên.

Lưu ý: Nếu $\frac{f(1)}{1-\alpha} \in \mathbb{Z}$ và $\frac{f(-1)}{1+\alpha} \in \mathbb{Z}$ thì $\frac{f(1)}{q-p} \in \mathbb{Z}$ và $\frac{f(-1)}{q+p} \in \mathbb{Z}$. Ta dùng tính chất này để loại trừ nghiệm.

– Vậy nếu ± 1 không là nghiệm của $f(x)$ thì nghiệm hữu tỉ của $f(x)$ thuộc tập hợp:

$$S = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid (p, q) = 1, p \mid a_n, q \mid a_0, \frac{f(1)}{q-p} \in \mathbb{Z}, \frac{f(-1)}{q+p} \in \mathbb{Z} \right\}$$

Hệ quả: Nếu đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, trong đó a_i nguyên $\forall i = \overline{0; n-1}$. Khi đó nếu $P(x)$ có nghiệm hữu tỉ thì mọi nghiệm hữu tỉ của $P(x)$ đều là số nguyên và là một trong các ước số của hệ số a_0 .

Mệnh đề 9: Nếu $\exists \alpha, \beta$ mà $f(\alpha).f(\beta) < 0$ thì đa thức $f(x)$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(\alpha; \beta)$

III. CÁC PHÉP TOÁN CƠ BẢN VỀ ĐA THỨC:

1. Kiến thức cơ bản:

1) Đơn thức nhân đa thức: $A(B + C) = A.B + A.C$

2) Đơn thức nhân đa thức: $(A + B).(C + D) = A.C + A.D + B.C + B.D$

3) Bảy hằng đẳng thức đáng nhớ:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

4) Các hằng đẳng thức đáng nhớ mở rộng:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(b + c)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > 0$$

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > 0, n \text{ lẻ}$$

Nhị thức Newton: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$ trong đó: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

IV. CÁC DẠNG TOÁN VỀ ĐA THỨC

1. DẠNG TOÁN XÁC ĐỊNH BẬC CỦA ĐA THỨC

Bài 1: Cho đa thức $P(x) = (1 - 3x + 3x^2)^{2002}(1 + 3x - 3x^2)^{2003}$

Tìm tổng các hệ số của đa thức có được sau khi khai triển, bỏ các dấu ngoặc và ước lượng các số hạng đồng dạng.

Hướng dẫn: $S = P(1) = 1$

Bài 2: Cho đa thức $P(x) = (x^{27} + x^7 - 1)^{2002}$. Tìm tổng các hệ số của các lũy thừa bậc lẻ của đa thức sau khi khai triển, bỏ các dấu ngoặc và ước lượng các số hạng đồng dạng.

Hướng dẫn:

$\deg P(x) = 27 \cdot 2002$ với hệ số của lũy thừa cao nhất là 1 $\Rightarrow$ đa thức $P(x)$ là đa thức bậc chẵn
Giả sử sau khi khai triển và rút gọn đa thức $P(x)$ đã cho có dạng

$$P(x) = x^{27 \cdot 2002} + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

$$P(1) = 1 + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 + a_0$$

$$P(-1) = 1 - a_{n-1} + a_{n-2} - \dots - a_1 + a_0$$

$$P(1) - P(-1) = 2(a_{n-1} + a_{n-3} + \dots + a_1)$$

Đặt $S = a_{n-1} + a_{n-3} + \dots + a_1$ (tổng các hệ số của các lũy thừa bậc lẻ)

$$\text{Mặt khác: } P(1) = (1 + 1 - 1)^{2002} = 1$$

$$P(-1) = (-1 - 1 - 1)^{2002} = 3^{2002}$$

$$P(1) - P(-1) = 1 - 3^{2002} = 2S \Rightarrow S = \frac{1 - 3^{2002}}{2}$$

Lưu ý: Cho đa thức $f(x)$ bậc $n > 1$, khi đó:

- Tổng các hệ số của $f(x)$ là: $f(1)$

- Tổng các hệ số của lũy thừa bậc lẻ là: $\frac{f(1) - f(-1)}{2}$

- Tổng các lũy thừa bậc chẵn và hệ số tự do là: $\frac{f(1) + f(-1)}{2}$

Bài 3 (hs tự làm): Cho đa thức $P(x) = (x^2 + x + 1)^{1001}$. Gọi $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2002}$ là các hệ số của đa thức nói trên (trong dạng chính tắc $P(x) = a_{2002}x^{2002} + a_{2001}x^{2001} + \dots + a_1x + a_0$). Đặt: $m = a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2002}$; $n = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2001}$

Xác định tính chẵn, lẻ của các số m và n

2. DẠNG TOÁN XÁC ĐỊNH ĐA THỨC

Phương pháp nội suy Newton:

Nếu có 2 bộ số: $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1})$ và $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n+1})$ tồn tại duy nhất một đa thức $f(x)$ có bậc n thỏa mãn: $f(x_1) = y_1; f(x_2) = y_2; f(x_3) = y_3; \dots f(x_{n+1}) = y_{n+1}$; Đa thức $f(x)$ trên có dạng:

$$f(x) = a_1 + a_2(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2) + \dots + a_{n+1}(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

Để tìm các số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1}$ ta lần lượt tính $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_{n+1})$

Bài 1: Tìm đa thức bậc hai $P(x)$ biết $P(0) = 25; P(1) = 7; P(2) = -9$

Theo công thức nội suy newton, có duy nhất một đa thức bậc 2 thỏa mãn yêu cầu.

Đặt $P(x) = b_1 + b_2x + b_3.x(x-1)$ (*)

Thay x lần lượt bằng 0, 1, 2 vào (*) ta được: $b_1 = 25; b_2 = -18; b_3 = 1$

Vậy đa thức cần tìm có dạng $P(x) = x^2 - 19x + 25$

Bài 2: Cho đa thức $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ và $P(1) = 3, P(2) = 9, P(3) = 19, P(4) = 33, P(5) = 51$. Tìm đa thức $P(x)$

Áp dụng công thức nội suy Newton:

Có duy nhất 1 đa thức $Q(x)$ bậc 4 thỏa: $Q(1) = 3, Q(2) = 9, Q(3) = 19, Q(4) = 33, Q(5) = 51$. Đó là đa thức có dạng:

$$Q(x) = a_1 + a_2(x - 1) + a_3(x - 1)(x - 2) + a_4(x - 1)(x - 2)(x - 3) + a_5(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$$

$$x = 1 \Rightarrow Q(1) = a_1 = 3$$

$$x = 2 \Rightarrow Q(2) = a_1 + a_2(x - 1) = 3 + a_2(2 - 1) = 9 \Rightarrow a_2 = 6$$

$$x = 3 \Rightarrow Q(3) = a_1 + a_2(x - 1) + a_3(x - 1)(x - 2) = 3 + 6(3 - 1) + a_3(3 - 1)(3 - 2) = 19 \Rightarrow a_3 = 2$$

$$x = 4 \Rightarrow Q(4) = a_1 + a_2(x - 1) + a_3(x - 1)(x - 2) + a_4(x - 1)(x - 2)(x - 3) \\ = 3 + 6(4 - 1) + 2(4 - 1)(4 - 2) + a_4(4 - 1)(4 - 2)(4 - 3) = 33 \Rightarrow a_4 = 0$$

$$x = 5 \Rightarrow Q(5) = 3 + 6(5 - 1) + 2(5 - 1)(5 - 2) + 0(5 - 1)(5 - 2)(5 - 3) + a_5(5 - 1)(5 - 2)(5 - 3)(5 - 4) = 51 \\ \Rightarrow a_5 = 0$$

$$\text{Vậy: } Q(x) = 3 + 6(x - 1) + 2(x - 1)(x - 2)$$

Vì $P(x)$ và $Q(x)$ có cùng giá trị tại $x = 1; 2; 3; 4; 5$ nên: $H(x) = P(x) - Q(x)$ nhận các giá trị 1, 2, 3, 4, 5 làm nghiệm.

Vì $P(x)$ là đa thức bậc 5 có hệ số cao nhất bằng 1; $Q(x)$ là đa thức bậc 2 nên $H(x)$ là đa thức bậc 5 có hệ số cao nhất là 1 $\Rightarrow H(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)$

$$\text{Mà } H(x) = P(x) - Q(x) \Rightarrow P(x) = H(x) + Q(x)$$

$$\Rightarrow P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) + 3 + 6(x-1) + 2(x-1)(x-2)$$

Để cho ngắn gọn và dễ nhớ, sau này ta chỉ cần trình bày như sau:

Áp dụng công thức nội suy Newton ta có:

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) + a_1(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + a_2(x-1)(x-2)(x-3) + a_3(x-1)(x-2) + a_4(x-1) + a_5$$

Rồi từ: $P(1) = 3, P(2) = 9, P(3) = 19, P(4) = 33, P(5) = 51$ ta tìm được a_1, a_2, a_3, a_4, a_5

Và suy ra $P(x)$

Chú ý:

– Từ giả thiết $P(1) = 3, P(2) = 9, P(3) = 19, P(4) = 33, P(5) = 51$, để tìm $P(x)$, ta có thể giải hệ 5 phương trình bậc nhất 5 ẩn: a, b, c, d, e .

Bài 3: Cho đa thức $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Biết $P(1) = 1; P(2) = 4; P(3) = 9; P(4) = 16; P(5) = 25$. Tính $P(6); P(7); P(8); P(9) = ?$

Hướng dẫn:

Cách 1:

Đặt $Q(x) = P(x) + H(x)$ sao cho:

+ Bậc $H(x)$ nhỏ hơn bậc của $P(x)$ và $Q(1) = Q(2) = Q(3) = Q(4) = Q(5) = 0$

$$H(x) = a_1x^4 + b_1x^3 + c_1x^2 + d_1x + e$$

$$\text{Vậy: } Q(x) = P(x) + a_1x^4 + b_1x^3 + c_1x^2 + d_1x + e$$

Vì $Q(1) = Q(2) = Q(3) = Q(4) = Q(5) = 0$ nên ta có:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e + 1 = 0 \\ 16a_1 + 8b_1 + 4c_1 + 2d_1 + e + 4 = 0 \\ 81a_1 + 27b_1 + 9c_1 + 3d_1 + e + 9 = 0 \\ 256a_1 + 64b_1 + 16c_1 + 4d_1 + e + 16 = 0 \\ 625a_1 + 125b_1 + 25c_1 + 5d_1 + e + 25 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = b_1 = d_1 = e_1 = 0; c_1 = -1$$

Vậy ta có: $Q(x) = P(x) - x^2$

Vì $x = 1, x = 2, x = 3, x = 4, x = 5$ là nghiệm của $Q(x)$, mà bậc của $Q(x)$ bằng 5 có hệ số của x^5 bằng 1 nên: $Q(x) = P(x) - x^2 = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$

$$\Rightarrow P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) + x^2.$$

Từ đó tính được: $P(6) = \quad ; P(7) = \quad ; P(8) = \quad ; P(9) = \quad$

Cách 2: Áp dụng công thức nội suy Newton (đây là cách tốt nhất cho các bài toán dạng này)

Bài 4: Cho đa thức $f(x)$ có tất cả các hệ số nguyên dương nhỏ hơn 8 thỏa mãn $f(8) = 20152016$. Tính tổng các hệ số của $f(x)$

Hướng dẫn :

$$\text{Giả sử } f(x) = a_n x^n + \dots + a_8 x^8 + a_7 x^7 + a_6 x^6 + a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\text{Có } f(8) : 8 \Rightarrow a_0 : 8 \text{ mà } a_0 < 8, a_0 \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow a_0 = 0$$

$$\text{Vậy: } f(8) = a_n 8^n + \dots + a_8 8^8 + a_7 8^7 + a_6 8^6 + a_5 8^5 + a_4 8^4 + a_3 8^3 + a_2 8^2 + a_1 8$$

$$\Rightarrow \frac{f(8)}{8} = a_n 8^{n-1} + \dots + a_8 8^7 + a_7 8^6 + a_6 8^5 + a_5 8^4 + a_4 8^3 + a_3 8^2 + a_2 8^1 + a_1 = 2519002$$

$$\text{-Có: } a_n 8^{n-1} + \dots + a_8 8^7 + a_7 8^6 + a_6 8^5 + a_5 8^4 + a_4 8^3 + a_3 8^2 + a_2 8^1 : 8$$

$$\Rightarrow \frac{f(8)}{8} = a_n 8^{n-1} + \dots + a_8 8^7 + a_7 8^6 + a_6 8^5 + a_5 8^4 + a_4 8^3 + a_3 8^2 + a_2 8^1 + a_1 \text{ chia 8 dư } a_1$$

$$\text{Mà } 2519002 \text{ chia 8 dư 2 nên } a_1 = 2$$

Trên máy tính ta bấm: $20152016 : 8 =$

Bấm tiếp: Alpha $\boxed{\div R}$ 8 $\rightarrow 314875, R = 2 \Rightarrow a_1 = 2$

Bấm máy tương tự quy trình trên ta được:

$$\begin{aligned} & \frac{f(8)}{8} - 2 \\ \Rightarrow & \frac{f(8)}{8} = a_n 8^{n-2} + \dots + a_8 8^6 + a_7 8^5 + a_6 8^4 + a_5 8^3 + a_4 8^2 + a_3 8 + a_2 = 314875 \end{aligned}$$

Bấm tiếp: Alpha $\boxed{\div R}$ 8 $\rightarrow 39359, R = 3 \Rightarrow a_2 = 3$

Tiếp tục bấm dấu = ta lại có: 4919, $R = 7 \Rightarrow a_3 = 7$

Tiếp tục bấm dấu = ta lại có: 614, $R = 7 \Rightarrow a_4 = 7$

Tiếp tục bấm dấu = ta lại có: 76, $R = 6 \Rightarrow a_5 = 6$

Tiếp tục bấm dấu = ta lại có: 9, $R = 4 \Rightarrow a_6 = 4$

$$\text{Nghĩa là lúc này ta có VP} = a_n 8^{n-2} + \dots + a_8 8 + a_7 = 9$$

Tiếp tục bấm dấu = ta lại có: 1, $R = 1 \Rightarrow a_7 = 1$

$$\text{Nghĩa là lúc này VP} = a_n 8^{n-1} + \dots + a_8 8 = 8 \Leftrightarrow a_n 8^{n-8} + \dots + 8a_7 + a_8 = 1$$

Ta phải có $1 - a_8 : 8$ suy ra $a_8 \leq -7$ hoặc $a_8 \geq 9$ hoặc $a_8 = 1$. Vì $f(x)$ có hệ số nguyên dương nhỏ hơn 8 nên $a_8 = 1$. Các hệ số của lũy thừa cao hơn 8 sẽ là 0.

$$\text{Vậy suy ra đa thức } f(x) \text{ cần tìm là: } f(x) = x^8 + x^7 + 4x^6 + 6x^5 + 7x^4 + 7x^3 + 3x^2 + 2x$$

Suy ra tổng các hệ số bằng 31

Cách khác :

$$\text{Có: } f(8) = a_n 8^n + \dots + a_8 8^8 + a_7 8^7 + a_6 8^6 + a_5 8^5 + a_4 8^4 + a_3 8^3 + a_2 8^2 + a_1 8 + a_0 = 20152016$$

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_{0(8)}} = 20152016$$

$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_{0(8)}}$ là biểu diễn của số 20152016 trong hệ đếm cơ số 8. Vì vậy để tìm các hệ số của $f(x)$ ta chỉ cần đổi số 20152016 sang hệ cơ số 8.

Cách đổi từ hệ thập phân sang hệ cơ số 8:

Số bị chia	Số chia	Thương	Dư	Hệ số
20152016	8	2519002	0	a_0
2519002	8	314875	2	a_1
314875	8	39359	3	a_2
39359	8	4919	7	a_3

4919	8	614	7	a₄
614	8	76	6	a₅
76	8	9	4	a₆
9	8	1	1	a₇
1	8	0	1	a₈

Trên MTCT ta bấm như sau :

$$20152016 \div 8 =$$

Trên màn hình hiện: 2519002, R0 - Ta ghi lại số dư 0 tức $a_0 = 0$

$$\text{Bấm tiếp vào máy tính : } \boxed{\text{Ans}} \div 8 =$$

Trên màn hình hiện: 314875, R2 - Ta ghi lại số dư 2 tức $a_1 = 2$

Tiếp tục bằng cách bấm các dấu “=” để tính các giá trị tiếp theo

Bài tương tự :

Tìm các đa thức $P(x)$ có hệ số nguyên, không âm, bậc không lớn hơn 6 thỏa điều kiện : $P(7)=102013$. ĐS: $P(x) = 6x^5 + 3x^3 + 2x^2 + 6x + 2$

Bài tập tự luyện:

Bài 1: Tìm k để đa thức $f(x) = x^4 - 9x^3 + 21x^2 + x + k$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 - x - 2$?

Bài 2: Cho $P(x)$ là đa thức với hệ số nguyên không âm và không lớn hơn 8. Giả sử $P(9) = 32078$. Hãy tìm đa thức $P(x)$?

Hướng dẫn:

Giả sử đa thức cần tìm có dạng: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$$\text{Theo giả thiết thì: } P(9) = a_n 9^n + a_{n-1} 9^{n-1} + \dots + a_1 9 + a_0 = 32078$$

Vì $a_i, i = \overline{1, n}$ là số nguyên không âm nhỏ hơn 9 nên:

$$P(9) = a_n 9^n + a_{n-1} 9^{n-1} + \dots + a_1 9 + a_0 = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}_{(9)} = 32078$$

Trong đó: $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}_{(9)}$ là biểu diễn của 32078 trong hệ đếm cơ

số 9 và $32078 = 48002_{(9)}$ Nên

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}_{(9)} = 48002 \Rightarrow n = 4, a_4 = 4, a_3 = 8, a_2 = 0, a_1 = 0, a_0 = 2$$

Suy ra đa thức cần tìm là: $P(x) = 4x^4 + 8x^3 + 2$. Thử lại thấy đúng.

Cách đổi từ hệ thập phân sang hệ cơ số 9:

Số bị chia	Số chia	Thương	Dư
32078 chia cho	9	3564	2
3564	9	396	0
396	9	44	0
44	9	4	8
4	9	0	4

Vậy: $32078 = 48002_{(9)}$

Lời bàn:

-Khi thực hiện đổi sang cơ số 9 bằng thực hiện phép chia trên ta đặt tính như sau:

32078	9				
2	3564	9			
	0	396	9		
		0	44	9	
			8	4	9
				4	0

Sử dụng MTCT ta bấm như Bài 4 ở trên

-Muốn đổi ngược lại số $48002_{(9)}$ sang hệ thập phân ta thực hiện như sau:

$$48002_{(9)} = 4.9^4 + 8.9^3 + 0.9^2 + 0.9^1 + 2.9^0 = 32078$$

Bài 3: Tìm một đa thức bậc hai biết: $P(0) = 19$; $P(1) = 85$; $P(2) = 1985$?

4.DẠNG TOÁN VỀ NGHIỆM CỦA ĐA THỨC – GIÁ TRỊ CỦA ĐA THỨC:

Bài 1: Cho $f(x)$ là đa thức với hệ số nguyên. Biết $f(0)$, $f(1)$ là các số lẻ. chứng minh rằng $f(x)$ không có nghiệm nguyên?

Hướng dẫn

Giả sử $x = a$ là nghiệm nguyên của $f(x)$ thì $f(x) = (x-a).Q(x)$.

Trong đó $Q(x)$ là đa thức có hệ số nguyên, do đó: $f(0) = a.Q(0)$ và $f(1) = (1-a).Q(1)$

Do $f(0)$ là số lẻ nên a là số lẻ, $f(1)$ là số lẻ nên $1 - a$ là số lẻ

Mà $1 - a$ là hiệu của hai số lẻ không thể là số lẻ (mâu thuẫn)

Vậy $f(x)$ không có nghiệm nguyên.

Bài 2: Cho đa thức $P(x) = 6x^5 + ax^4 + bx^3 + x^2 + cx + 450$, biết đa thức $P(x)$ chia hết cho các đa thức $x - 2$; $x - 3$; $x - 5$. Hãy tìm a , b , c và các nghiệm của $P(x)$.

Hướng dẫn:

$$P(2) = 192 + 16a + 8b + 4 + 2c + 450 = 0 \quad c + 4b + 8a = -323$$

$$P(3) = 1458 + 81a + 27b + 9 + 3c + 450 = 0 \quad c + 9b + 27a = -639$$

$$P(5) = 18750 + 625a + 125b + 25 + 5c + 450 = 0 \quad c + 25b + 125a = -3845$$

$$\text{Kết quả : } a = -59 ; b = 161 ; c = -495$$

$$\text{Ta có: } P(x) = (x-2)(x-3)(x-5)(mx^2 + nx + q)$$

$$m = 6; n = 1 ; q = -15$$

$$P(x) = (x-2)(x-3)(x-5)(6x^2 + x - 15) = (x-2)(x-3)(x-5)(3x+5)(2x-3)$$

Vậy nghiệm của $P(x)$ là: $x = 2; 3; 5; -\frac{5}{3}; \frac{3}{2}$

Bài 3: Cho đa thức $P(x)$ là đa thức bậc 3 có hệ số cao nhất bằng 1 sao cho $P(2016) = 2017$ và $P(2017) = 2018$. Tính giá trị của $-3P(2018) + P(2019)$

Hướng dẫn:

$$\text{Xét đa thức } Q(x) = P(x) - (x+1)$$

Dễ thấy $Q(x)$ là đa thức bậc 3

Từ giả thiết suy ra $Q(2016) = Q(2017) = 0$, nên 2016 và 2017 là 2 nghiệm của $Q(x)$

$$\text{Do đó } Q(x) = (x-a)(x-2016)(x-2017)$$

$$\text{Suy ra } P(x) = Q(x) + x + 1 = (x-a)(x-2016)(x-2017) + x + 1$$

$$\text{Vậy } -3P(2018) + P(2019) = -4031$$

Bài 4: Cho đa thức $f(x)$ bậc 3 với hệ số của x^3 là k , $k \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn: $f(1999) = 2000$; $f(2000) = 2001$. Chứng minh rằng: $f(2001) - f(1998)$ là hợp số.

Hướng dẫn :

Tìm đa thức phụ: đặt $g(x) = f(x) + (ax + b)$. Tìm a , b để $g(1999) = g(2000) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1999a + b + 2000 = 0 \\ 2000a + b + 2001 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow g(x) = f(x) - x - 1$$

Tính giá trị của $f(x)$:

Do bậc của $f(x)$ là 3 nên bậc của $g(x)$ là 3 và $g(x)$ chia hết cho:

$(x - 1999), (x - 2000)$ nên: $g(x) = k(x - 1999)(x - 2000)(x - x_0)$

$$\Rightarrow f(x) = k(x - 1999)(x - 2000)(x - x_0) + x + 1.$$

Từ đó tính được: $f(2001) - f(1998) = 3(2k + 1)$ là hợp số.

Bài 5: Cho đa thức $f(x)$ bậc 4, hệ số của bậc cao nhất là 1 và thỏa mãn: $f(1) = 3; P(3) = 11; f(5) = 27$. Tính giá trị $A = f(-2) + 7f(6)$

Hướng dẫn :

-Tồn tại một đa thức bậc 2 $g(x)$ nhận các giá trị 1; 3; 5 là nghiệm nên:

Đặt $g(x) = f(x) + ax^2 + bx + c$. Tìm a, b, c sao cho $g(1) = g(3) = g(5) = 0$

Từ đó suy ra: a, b, c là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + b + c + 3 = 0 \\ 9a + 3b + c + 11 = 0 \\ 25a + 5b + c + 27 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = f(x) - x^2 - 2$$

-Vì $f(x)$ bậc 4 nên $g(x)$ cũng có bậc là 4 và $g(x)$ chia hết cho $(x - 1), (x - 3), (x - 5)$,

$$\Rightarrow g(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - x_0) \Rightarrow f(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - x_0) + x^2 + 2$$

Ta tính được: $A = f(-2) + 7f(6) =$

Bài tập tự luyện:

Bài 1: Cho đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Biết $P(1) = 5; P(2) = 7; P(3) = 9; P(4) = 11$. Tính $P(5); P(6); P(7); P(8); P(9) = ?$

Hướng dẫn :

Ta có: $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) + 2(x - 1) + 5$

**Bài 2: Cho đa thức $f(x)$ bậc 3. Biết $f(0) = 10; f(1) = 12; f(2) = 4; f(3) = 1$. Tìm $f(10) = ?$
(Đề thi HSG CHDC Đức)**

Hướng dẫn :

Dùng công thức nội suy Newton ta được :

$$f(x) = f(x) = \frac{15}{6}x(x-1)(x-2) - 5x(x-1) + 2x + 10$$

Hoặc giải cách khác:

– Giả sử $f(x)$ có dạng: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Vì $f(0) = 10$; $f(1) = 12$; $f(2) = 4$; $f(3) = 1$

$$\text{nên: } \begin{cases} d = 10 \\ a + b + c + d = 12 \\ 8a + 4b + 2c + d = 4 \\ 27a + 9b + 3c + d = 1 \end{cases}$$

Giải hệ trên bằng MTBT ta được : $\Rightarrow f(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{25}{2}x^2 + 12x + 10 \Rightarrow f(10) =$

Bài 3: Cho đa thức $f(x)$ bậc 3 biết rằng khi chia $f(x)$ cho $(x - 1)$, $(x - 2)$, $(x - 3)$ đều được dư là 6 và $f(-1) = -18$. Tính $f(2005) = ?$

Hướng Dẫn:

-Từ giả thiết, ta có: $f(1) = f(2) = f(3) = 6$ và có $f(-1) = -18$

-Ta được : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x$

Bài 4: Cho đa thức $P(x) = x^{15} - 2x^{12} + 4x^7 - 7x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x - 1$

Tính $P(1,25)$; $P(4,327)$; $P(-5,1289)$; $P(1\frac{3}{4})$

Hướng dẫn :

–Nhập công thức $P(x)$

–Tính giá trị của đa thức tại các điểm: dùng chức năng CALC

Bài 5: Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^8 + x^9 \quad \text{tại } x = 0,53241$$

$$Q(x) = x^2 + x^3 + \dots + x^8 + x^9 + x^{10} \quad \text{tại } x = -2,1345$$

Hướng dẫn :

–Áp dụng hằng đẳng thức: $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$. Ta có:

$$P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^8 + x^9 = \frac{(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^9)}{x-1} = \frac{x^{10}-1}{x-1}$$

Từ đó tính $P(0,53241) = \dots$

Tương tự:

$$Q(x) = x^2 + x^3 + \dots + x^8 + x^9 + x^{10} = x^2(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^8) = x^2 \frac{x^9 - 1}{x - 1}$$

Từ đó tính $Q(-2,1345) = \dots$

Bài 6: Cho đa thức $f(x)$ bậc 4, hệ số của bậc cao nhất là 1 và thỏa mãn: $f(1) = 3$; $P(3) = 11$; $f(5) = 27$. Tính giá trị $A = f(-2) + 7f(6)$

Hướng dẫn :

–Tồn tại một đa thức bậc 2 $g(x)$ nhận các giá trị 1; 3; 5 là nghiệm nên:

Đặt $g(x) = f(x) + ax^2 + bx + c$. Tìm a, b, c sao cho $g(1) = g(3) = g(5) = 0$

Từ đó suy ra: a, b, c là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + b + c + 3 = 0 \\ 9a + 3b + c + 11 = 0 \\ 25a + 5b + c + 27 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = f(x) - x^2 - 2$$

–Vì $f(x)$ bậc 4 nên $g(x)$ cũng có bậc là 4 và $g(x)$ chia hết cho $(x - 1), (x - 3), (x - 5)$,

$$\Rightarrow g(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-x_0) \Rightarrow f(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-x_0) + x^2 + 2$$

$$\text{Ta tính được: } A = f(-2) + 7f(6) =$$

Bài 7: Cho đa thức $f(x)$ bậc 3 biết rằng khi chia $f(x)$ cho $(x - 1), (x - 2), (x - 3)$ đều được dư là 6 và $f(-1) = -18$. Tính $f(2005) = ?$

Hướng Dẫn:

–Từ giả thiết, ta có: $f(1) = f(2) = f(3) = 6$ và có $f(-1) = -18$

–Giải tương tự như bài 8, ta có $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x$

Bài 8: Cho hàm số $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$. Hãy tính các tổng sau:

$$a) \quad S_1 = f\left(\frac{1}{2002}\right) + f\left(\frac{2}{2002}\right) + \dots + f\left(\frac{2001}{2002}\right)$$

$$b) \quad S_2 = f\left(\sin^2 \frac{\pi}{2002}\right) + f\left(\sin^2 \frac{2\pi}{2002}\right) + \dots + f\left(\sin^2 \frac{2001\pi}{2002}\right)$$

Hướng Dẫn:

*Với hàm số $f(x)$ đã cho trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

$$\text{Nếu } a + b = 1 \text{ thì } f(a) + f(b) = 1$$

*Áp dụng bổ đề trên, ta có:

$$\begin{aligned} \text{a) } S_1 &= \left[f\left(\frac{1}{2002}\right) + f\left(\frac{2001}{2002}\right) \right] + \dots + \left[f\left(\frac{1000}{2002}\right) + f\left(\frac{1002}{2002}\right) \right] + f\left(\frac{1001}{2002}\right) \\ &= 1 + \dots + 1 + \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) \right] = 1000 + \frac{1}{2} = 1000,5 \end{aligned}$$

b) Ta có $\sin^2 \frac{\pi}{2002} = \sin^2 \frac{2001\pi}{2002}, \dots, \sin^2 \frac{1000\pi}{2002} = \sin^2 \frac{1002\pi}{2002}$. Do đó:

$$\begin{aligned} S_2 &= 2 \left[f\left(\sin^2 \frac{\pi}{2002}\right) + f\left(\sin^2 \frac{2\pi}{2002}\right) + \dots + f\left(\sin^2 \frac{1000\pi}{2002}\right) \right] + f\left(\sin^2 \frac{1001\pi}{2002}\right) \\ &= 2 \left[\left(f\left(\sin^2 \frac{\pi}{2002}\right) + f\left(\sin^2 \frac{1000\pi}{2002}\right) \right) + \dots + \left(f\left(\sin^2 \frac{500\pi}{2002}\right) + f\left(\sin^2 \frac{501\pi}{2002}\right) \right) \right] + f\left(\sin^2 \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2 \left[\left(f\left(\sin^2 \frac{\pi}{2002}\right) + f\left(\cos^2 \frac{\pi}{2002}\right) \right) + \dots + \left(f\left(\sin^2 \frac{500\pi}{2002}\right) + f\left(\cos^2 \frac{500\pi}{2002}\right) \right) \right] + f(1) \\ &= 2[1 + 1 + \dots + 1] + \frac{4}{6} = 1000 + \frac{2}{3} = 1000\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Bài 9: Cho đa thức: $P(x) = (3x^2 + 2x - 7)^{64}$. Tính tổng các hệ số của đa thức chính xác đến đơn vị.

Hướng Dẫn:

Tổng các hệ số của $P(x)$ là tính $P(1) = 2^{64}$

Kết hợp cả máy tính và nháp ta tính được: $P(1) = 18446744073709$

Bài 10. Cho đa thức $P(x) = x^{11} + a_{10}x^{10} + \dots + a_1x + m$. Biết rằng:

$P(i) = i, \forall i = 1, 2, 3, 4, \dots, 11; a_i \in \mathbb{Z}$. Nêu tóm tắt cách tính và tính chính xác giá trị $P(12)$. Xét dãy các số nguyên $x_1 = 34, x_2 = 334, x_3 = 3334, \dots, x_n = 33\dots34$, trong đó x_n có n chữ số 3 và chữ số hàng đơn vị là 4. Gọi $S(n)$ là số chữ số 3 có mặt trong số $9(x_n)^3$. Nêu cách tính $S(n)$ và tính $S(2010)$

Hướng Dẫn:

a) Viết lại $P(x)=(x-1)(x-2)\dots(x-11)+ax+b$. Thay $x=1, 2$ ta tính được $a=1, b=0$ (khi đó thỏa mãn các điều kiện giả thiết. Do đó $P(x)=(x-1)(x-2)\dots(x-11)+x$. Từ đó $P(12)=1.2.3\dots 11+12=39916812$.

b) *Nêu cách tính:*

Có

$$x_n - 1 = 33\dots 3 = \frac{10^{n+1} - 1}{3} \Rightarrow x_n = \frac{10^{n+1} + 2}{3} \Rightarrow 9(x_n)^3 = \frac{1}{3}(10^{n+1} + 2)^3 = \frac{1}{3}(10^{3(n+1)} - 1) + 2.10^{2(n+1)} + 4.10^{n+1} + 3$$

Vì $\frac{1}{3}(10^{3(n+1)} - 1)$ có tất cả $3(n+1)$ chữ số 3, suy ra: $9(x_n)^3 = \underset{n}{3}\dots\underset{n}{3}5\underset{n}{3}\dots\underset{n}{3}7\underset{n}{3}\dots\underset{n}{3}6$ hay $9(x_n)^3$ có đúng $3n$ chữ số 3. Tính được: $S(2010)=6030$.

2. TÌM THƯƠNG VÀ DƯ:

Phương pháp chính:

- Dùng định lý Bezout và các hệ quả của nó
- Lược đồ Horner

Dạng 1: Tìm thương và dư trong phép chia đa thức $P(x)$ cho $(x + a)$

Dùng lược đồ Hoocner để tìm thương và dư trong phép chia đa thức $P(x)$ cho $(x + a)$

Dạng 2: Tìm dư trong phép chia đa thức $P(x)$ cho $(ax + b)$

- Ta phân tích: $P(x) = (ax + b)Q(x) + r \Rightarrow P\left(-\frac{b}{a}\right) = 0.Q\left(-\frac{b}{a}\right) + r \Rightarrow r = P\left(-\frac{b}{a}\right)$

- Để tìm hệ số của đa thức thương: dùng lược đồ Hoocner để tìm thương trong phép chia đa thức $P(x)$ cho $(x + \frac{b}{a})$ sau đó nhân thương đó với $\frac{1}{a}$ ta được đa thức thương cần tìm.

Dạng 3: Tìm phần dư khi chia đa thức $f(x)$ cho $x^2 - a^2$

* Vì đa thức chia có bậc 2 nên dư của phép chia trên là đa thức bậc nhất có dạng:

$$Ax + B. \text{ Ta phải tìm } A \text{ và } B$$

$$\text{Ta có: } f(x) = (x^2 - a^2).q(x) + Ax + B$$

$$\text{Vậy: } f(a) = A.a + B;$$

$$f(-a) = A.(-a) + B$$

Từ đó tìm được A và B

Bài 1: Tìm thương và dư trong phép chia $P(x) = x^7 - 2x^5 - 3x^4 + x - 1$ cho $(x + 5)$

Sử dụng lược đồ Hoocner, ta có:

	1	0	-2	-3	0	0	1	-1
-5	1	-5	23	-118	590	-2950	14751	-73756

$$\Rightarrow x^7 - 2x^5 - 3x^4 + x - 1 = (x + 5)(x^6 - 5x^5 + 23x^4 - 118x^3 + 590x^2 - 2950x + 14751) - 73756$$

Bài 2:

a) Tìm dư khi chia đa thức $x^{100} - 2x^{51} + 1$ cho $x^2 - 1$

b) Tìm dư khi chia đa thức $x^{100} - 2x^{51} + 1$ cho $x^2 + 1$

Hướng dẫn :

a) Ta có: $f(x) = x^{100} - 2x^{51} + 1 = (x^2 - 1).q(x) + ax + b$

$$f(1) = 0 = a + b; \quad f(-1) = 4 = -a + b$$

$$\Rightarrow a = -2; b = 2. \text{ Vậy dư là : } -2x + 2$$

b) Học sinh tự làm

$$\text{Ta có: } f(x) = (x^{100} + x^2) - (2x^{51} + 2x) - (x^2 + 1) + (2x + 2)$$

$$f(x) = x^2(x^{98} + 1) - 2x(x^{50} + 1) - (x^2 + 1) + (2x + 2)$$

$$\text{Vì : } x^2(x^{98} + 1) : (x^2 + 1); 2x(x^{50} + 1) : (x^2 + 1); (x^2 + 1) : (x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ chia cho } (x^2 + 1) \text{ dư là } 2x + 2$$

Bài 3: Tìm dư trong phép chia $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4x - 6$ cho $(2x - 5)$

Hướng Dẫn:

$$- \text{Ta có: } P(x) = (2x - 5).Q(x) + r \Rightarrow P\left(\frac{5}{2}\right) = 0.Q\left(\frac{5}{2}\right) + r \Rightarrow r = P\left(\frac{5}{2}\right) \Rightarrow r = P\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\text{Tính trên máy ta được: } r = P\left(\frac{5}{2}\right) =$$

Bài 4: Tìm thương và dư trong phép chia $P(x) = x^7 - 2x^5 - 3x^4 + x - 1$ cho $(x + 5)$

Hướng Dẫn:

– Sử dụng lược đồ Hoocner, ta có:

	1	0	-2	-3	0	0	1	-1
-5	1	-5	23	-118	590	-2950	14751	-
								73756

* Tính trên máy tính các giá trị trên như sau:

$$(-) 5 \text{ [SHIFT] [STO] [M]}$$

$$1 \text{ [x] [ANPHA] [M] [+] 0 [=] \quad (-5) : \quad \text{ghi ra giấy} \quad -5$$

$$\text{[x] [ANPHA] [M] [+] - 2 [=] \quad (23) : \quad \text{ghi ra giấy} \quad 23$$

$$\text{[x] [ANPHA] [M] [-] 3 [=] \quad (-118) : \quad \text{ghi ra giấy} \quad -118$$

$$\boxed{\times} \boxed{\text{ANPHA}} \boxed{\text{M}} \boxed{+} \boxed{0} \boxed{=} \quad (590) : \text{ ghi ra giấy } 590$$

$$\boxed{\times} \boxed{\text{ANPHA}} \boxed{\text{M}} \boxed{+} \boxed{0} \boxed{=} \quad (-2950) : \text{ ghi ra giấy } -2950$$

$$\boxed{\times} \boxed{\text{ANPHA}} \boxed{\text{M}} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{=} \quad (14751) : \text{ ghi ra giấy } 14751$$

$$\boxed{\times} \boxed{\text{ANPHA}} \boxed{\text{M}} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{=} \quad (-73756) : \text{ ghi ra giấy } -73756$$

$$x^7 - 2x^5 - 3x^4 + x - 1 = (x + 5)(x^6 - 5x^5 + 23x^4 - 118x^3 + 590x^2 - 2950x + 14751) - 73756$$

Bài 5: Tìm thương và dư trong phép chia $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ cho $(2x - 1)$

Hướng Dẫn:

– Thực hiện phép chia $P(x)$ cho $\left(x - \frac{1}{2}\right)$, ta được:

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{7}{4}\right) + \frac{1}{8}. \text{ Từ đó ta phân tích:}$$

$$\begin{aligned} P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1 &= 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{7}{4}\right) + \frac{1}{8} \\ &= (2x - 1) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{7}{8}\right) + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Bài 6: Tìm các giá trị của m để đa thức $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 + m$ chia hết cho $Q(x) = 3x + 2$

Hướng dẫn:

– Phân tích $P(x) = (2x^3 + 3x^2 - 4x + 5) + m = P_1(x) + m$. Khi đó:

$P(x)$ chia hết cho $Q(x) = 3x + 2$ khi và chỉ khi: $P_1(x) + m = (3x + 2) \cdot H(x)$

$$\text{Ta có: } P_1\left(-\frac{2}{3}\right) + m = 0 \Rightarrow m = -P_1\left(-\frac{2}{3}\right)$$

Tính trên máy giá trị của đa thức $P_1(x)$ tại $x = -\frac{2}{3}$ ta được $m =$

Bài 7: Cho hai đa thức $P(x) = 3x^2 - 4x + 5 + m$; $Q(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 7 + n$. Tìm m, n để hai đa thức trên có nghiệm chung $x_0 = \frac{1}{2}$

Hướng dẫn:

$x_0 = \frac{1}{2}$ là nghiệm của $P(x)$ thì $m = -P_1\left(\frac{1}{2}\right)$, với $P_1(x) = 3x^2 - 4x + 5$

$x_0 = \frac{1}{2}$ là nghiệm của $Q(x)$ thì $n = -Q_1\left(\frac{1}{2}\right)$, với $Q_1(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 7$.

Tính trên máy ta được: $m = -P_1\left(\frac{1}{2}\right) =$; $n = -Q_1\left(\frac{1}{2}\right) =$

Bài 8: Chia x^8 cho $x + 0,5$ được thương $q_1(x)$ dư r_1 . Chia $q_1(x)$ cho $x + 0,5$ được thương $q_2(x)$ dư r_2 . Tìm r_2 ?

Hướng dẫn:

– Ta phân tích: $x^8 = (x + 0,5).q_1(x) + r_1$; $q_1(x) = (x + 0,5).q_2(x) + r_2$

– Dùng lược đồ Hoocher, ta tính được hệ số của các đa thức $q_1(x)$, $q_2(x)$ và các số dư r_1 , r_2 :

	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$-\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$
$-\frac{1}{2}$	1	-1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{16}$	$-\frac{3}{16}$	$\frac{7}{64}$	$-\frac{1}{16}$	

Vậy: $r_2 = -\frac{1}{16}$

Bài tập tự luyện:

Bài 1: cho đa thức: $P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ và cho biết : $P(1) = -15$, $P(2) = -15$, $P(3) = -9$

a) Tìm các hệ số b, c, d của đa thức $P(x)$

b) Tìm số dư r_1 trong phép chia $P(x)$ cho $(x-4)$

c) Tìm số dư r_2 trong phép chia $P(x)$ cho $2x + 3$ (chính xác đến hai chữ số ở phần thập phân). ĐS: $b = -3$; $c = 2$; $d = -15$; $r_1 = 9$; $r_2 = -28,13$

CHUYÊN ĐỀ 8 CÁC PHÉP TOÁN TRẦN MÀN HÌNH

1) DỰA VÀO QUY LUẬT CHỮ SỐ TẬN CÙNG :

Phép cộng: 3 chữ số tận cùng của tổng $12345+67890$ cũng chính là 3 chữ số tận cùng của tổng $345+890$. Thật vậy ta có: $12345+67890=80235$; $345+890=1235$

Phép nhân: 3 chữ số tận cùng của tích 12345.54321 cũng chính là 3 chữ số tận cùng của tích 345.321 . Ta có : $12345.54321=670592745$; $345.321=110745$

Lũy thừa: 3 chữ số tận cùng của lũy thừa 12345^3 cũng chính là 3 chữ số tận cùng của lũy thừa 345^3 . Ta có : $12345^3=1881365963625$; $345^3=41063625$

Dựa vào nhận xét này, khi tính toán trên máy tính cầm tay với các phép toán lớn (nhiều hơn 15 chữ số) ta phải tính các chữ số tận cùng để có thể ghi được đáp số chính xác.

Ví dụ 1: Tính chính xác $B = 123456789^2$

Nhập phép tính vào máy ta thu được kết quả: $B = 1.524157875.10^{16}$. Phần lũy thừa 10^{16} (1 chữ số phần nguyên) cho thấy kết quả của phép tính này có 17 chữ số, vượt quá phạm vi lưu trữ của máy (15 chữ số).

Để tìm các chữ số bị ẩn phía sau do phép tính quá dài ta bấm tiếp:

Ans – $1.52415787.10^{16}$ (chỉ lấy đến số 7 vì số 5 có thể đã bị làm tròn)

Trên màn hình hiện kết quả: 50190500, ghép vào ta được số: 15241578750190500

Tuy nhiên do phạm vi lưu trữ và cho kết quả chính xác của máy là 15 chữ số hơn nữa chữ số thứ 15 từ trái qua có thể cũng đã bị làm tròn nên chỉ có 14 chữ số đầu tiên là chính xác. Số này có 17 chữ số, vậy 3 chữ số tận cùng cần phải tính lại. Tìm 3 chữ số tận cùng của B bằng cách tính lũy thừa của 3 chữ số tận cùng của B: 789^2 ta được: $789^2=622521$

521 là ba chữ số cuối của kết quả. Điền vào, ta thu được kết quả chính xác sau:

15241578750190521.

Ví dụ 2: Tính chính xác 1023456^3

Nhập 1023456^3 . Xuất: $1.072031457.10^{18}$ (Kết quả chính xác có 19 chữ số)

Nhập :Ans – $1.07203145.10^{18} = 6922400000$

Như vậy kết quả chính xác có dạng: 10720314569224*****

Ta tìm 5 chữ số tận cùng: $23456^3=23456^2.23456$

5 chữ số tận cùng 23456^2 là 83936. Tiếp tục lấy 83936.23456 thu được kết quả 1968802816. Năm chữ số tận cùng 02816 cũng là 5 chữ số tận cùng của kết quả.

⇒ **Đáp án: 1072031456922402816**

Lưu ý: Một vài tình huống có thể dẫn đến sai lầm của học sinh như sau:

Ví dụ: 53069×464606047

Nhập phép toán 53069×464606047

Bấm hiển thị kết quả $2.465617831.10^{13}$

Lấy Ans – $2.46561783.10^{13}=8243$

Học sinh ghi kết quả 246561783**8234** (13 chữ số) là **SAI** vì số này có 14 chữ số

Kết quả đúng là 246561783**08234**

2. DỰA VÀO SỰ PHÂN TÍCH QUY LUẬT PHÉP TOÁN:

Ví dụ 1: Tính chính xác: $123112321233123412351236123712381239 \times 12345$

Bước 1: Lấy 12345×1239 kết quả 15295455 lấy 5455 nhớ 1529

Bước 2: Lấy 12345×1238 ra kết quả 15283110 cộng với 1529 ra kết quả 15284639 lấy 4639 nhớ 1528

Bước 3: Lấy 12345×1237 ra kết quả 15283110 cộng với 1529 ra kết quả 15272293 lấy 2293 nhớ 1527....

Cứ như vậy ta có kết quả:

1519821605622908525476009947229346395455

Quy trình bấm máy: $B=B - 1; C=(A.B+C) \div \boxed{R} 10000$

Nhập giá trị ban đầu: $B=1240, A=12345, C=0$

Ví dụ 2: Tính chính xác của số $A = \left(\frac{10^{12} + 2}{3} \right)^2$

Hướng Dẫn:

-Dùng máy tính, tính một số kết quả: $\frac{10^2 + 2}{3} = 34$ và $\left(\frac{10^2 + 2}{3} \right)^2 = 1156$

$$\frac{10^3 + 2}{3} = 334 \text{ và}$$

$$\left(\frac{10^3 + 2}{3} \right)^2 = 111556$$

$$\frac{10^4 + 2}{3} = 3334 \text{ và } \left(\frac{10^4 + 2}{3} \right)^2 = 11115556$$

Nhận xét: $\left(\frac{10^k + 2}{3} \right)^2$ là số nguyên gồm k chữ số 1, (k – 1) chữ số 5, chữ số cuối cùng là 6 $\Rightarrow A=111111111111555555555556$

Ví dụ 3: Tính $A = 999\,999\,999^3$

Hướng Dẫn:

Ta có: $9^3=729$; $99^3= 970299$; $999^3=997002999$; $9999^3 =$

$$= 9999^2.9999=9999^2(1000-1)= 999700029999.$$

Từ đó ta có quy luật: $\underbrace{99\dots9}_n^3 = \underbrace{99\dots9}_{n-1} \underbrace{7}_{n-1} \underbrace{00\dots0}_{n-1} \underbrace{299\dots9}_n$

Vậy $999\,999\,999^3 = 999\,999\,997\,000\,000\,002\,999\,999\,999$.

3. KẾT HỢP VỚI TÍNH TRÊN NHÁP:

Bài 1: Tính kết quả đúng của các tích sau:

a) $M = 2222255555 \cdot 2222266666$.

b) $N = 20032003 \cdot 20042004$.

Hướng Dẫn:

a) Đặt $A = 22222$, $B = 55555$, $C = 66666$.

Ta có $M = (A \cdot 10^5 + B)(A \cdot 10^5 + C) = A^2 \cdot 10^{10} + AB \cdot 10^5 + AC \cdot 10^5 + BC$

Tính trên máy:

$A^2 = 493817284$; $AB = 1234543210$; $AC = 1481451852$; $BC = 3703629630$

Tính trên giấy:

$A^2 \cdot 10^{10}$	4	9	3	8	1	7	2	8	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$AB \cdot 10^5$					1	2	3	4	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0
$AC \cdot 10^5$					1	4	8	1	4	5	1	8	5	2	0	0	0	0
BC										3	7	0	3	6	2	9	6	3
M	4	9	3	8	4	4	4	4	4	3	2	0	9	8	2	9	6	3

b) Đặt $X = 2003$, $Y = 2004$. Ta có:

$N = (X \cdot 10^4 + X)(Y \cdot 10^4 + Y) = XY \cdot 10^8 + 2XY \cdot 10^4 + XY$

Tính XY , $2XY$ trên máy, rồi tính N trên giấy như câu a)

Đáp số: $M = 4938444443209829630$. $N = 401481484254012$.

Bài tập tự luyện: Tính chính xác các phép toán sau

Bài 1:

a) $A = 2020202020 \times 2121212121$

b) $B = 20202021 \times 20212022$

c) 20202021^3

d) 30041975×30042021

e) 19051890×19052021

Đáp số:

a) 4285277011692684420

b) 408323692896462

c) 8244882194045379255261

d) 902521643831475

e) 362977008369690

Bài 2: Tính chính xác

$201220132014201520162017201820192020 \times 2021$

Đáp số: 406665886800701272247436764878608072420

Bài 3: Tính tổng các chữ số của kết quả:

a) 43^7

b) 2021^6

Đáp số: a) 43

b) 100

Bài 4: Tính tổng các chữ số chẵn của kết quả: $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2021^3$

Đáp số: 16

Bài 5: Tính chính xác: $S=1.2.3+3.4.5+5.6.7+ \dots +2019.2020.2021$

Đáp số: 4166536222890

Bài 6: Tính tổng các chữ số lẻ của kết quả: $S=1^3+6^3+11^3+ \dots +2021^3$

Đáp số: 7

Bài 7: Tính chính xác kết quả: $S = 1.1! + 2.2! + 3.3! + 4.4! + \dots + 16.16!$

với $n!=1.2.3.4.5 \dots (n-1).n$

Đáp số: 355687428095999

Bài 8 : Tính chính xác: 9876543^3 ĐS: 963418267239450275007

Bài 9: Tính chính xác kết quả của phép tính sau: $A = 12578963 \times 14375$

ĐS: $A=180822593125$

Bài 10 : Tính chính xác của số: $B = 123456789^2$ ĐS: $B=15241578750190521$

Bài 11 : Tính chính xác của số: $C = 1023456^3$ ĐS: $C=1072031456922402816$

Bài 12 : Tính kết quả đúng của các tích sau: (Thi giải Toán trên MTBT khu vực – Năm học 2003–2004)

a) $M = 2222255555 \times 2222266666$

b) $N = 20032003 \times 20042004$

Đáp số: a) $M = 4938444443209829630$ b) $N = 401481484254012$

Bài 13: Tính kết quả đúng (không sai số) của các biểu thức:

$Q = 3333355555 \times 3333377777$ ĐS: 11111333329876501235

$H = 123456789^2$ ĐS: 15241578750190521

CHUYÊN ĐỀ 9

TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

I. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN:

Bài 1 : Tìm số hữu tỉ x biết:

$$\frac{12345679}{333333333} \times \left(x - \frac{5 + \frac{5}{17} + \frac{5}{89} - \frac{5}{113}}{11 + \frac{11}{17} + \frac{11}{89} - \frac{11}{113}} : \frac{10 + \frac{10}{23} + \frac{10}{243} - \frac{10}{611}}{3 + \frac{3}{23} + \frac{3}{243} - \frac{3}{611}} \right) = \frac{434343}{515151}$$

ĐS: $x = \frac{8565}{374}$

Bài 2: Tính biểu thức : $A = \frac{1}{2^3} \times \left(\frac{2^2 - \frac{2^2}{7} + \frac{2^2}{7^2} - \frac{2^2}{7^3}}{1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^3}} : \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3}}{2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3}} \right) : \frac{200820082008}{200920092009}$

ĐS: $\frac{2009}{2008}$

Bài 3: Cho: $A = \frac{2 - 3\sqrt{3} \sin^3 90^\circ + \cot^3 30^\circ + \cos^2 45^\circ}{\tan^4 60^\circ + \sin^2 30^\circ \cos^3 60^\circ}$; $B = \frac{1}{3} \cot 55^\circ + \frac{\sin^4 40^\circ \cos^2 20^\circ}{\tan^3 108^\circ}$.

Tính $C = A + B$

ĐS: 0,5050

Bài 4: Cho $\sin$

$\alpha = 0,123$; $\tan \beta = 2,345$. Tính giá trị của biểu thức (chính xác đến 0,001):

$$C = \frac{8 \cos^3 \alpha - 2 \sin^3 \alpha + \cos \beta}{2 \cos \beta - \sin^3 \beta + \sin^2 \alpha}$$

ĐS: $C =$

384.689

Bài 5: $A = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) : \left[\left(\frac{3}{7} - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{5}\right)\right]}{\left(\frac{7}{8} + \frac{3}{5}\right) \cdot \left[\left(\frac{2}{9} + \frac{3}{5}\right) : \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right)\right]}$

ĐS: 0.734068222

Bài 6: Tìm nghiệm gần đúng của phương trình:

$$\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} x - \frac{\sqrt{7} + \sqrt{11}}{\sqrt{5}} \right) = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{7} - 3} x + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{5 - \sqrt{7}}$$

ĐS: $x \approx 0,1423$

Bài 7: Tìm y biết: $1 + \frac{2}{3 + \frac{4}{5 + \frac{6}{7 + \frac{8}{y}}}} = \frac{563}{365}$

ĐS: $y = 28$

II. CÁC DẠNG TOÁN NÂNG CAO:

Bài 1: Cho $x^{1000} + y^{1000} = 6,912$; $x^{2000} + y^{2000} = 33,76244$. Tính $A = x^{3000} + y^{3000}$

Hướng dẫn:

$$\text{Đặt } a = x^{1000}; b = y^{1000} \Rightarrow a + b = x^{1000} + y^{1000} = 6,912; a^2 + b^2 = x^{2000} + y^{2000} = 33,76244$$

$$\text{Khi đó: } A = a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3 \cdot \frac{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)}{2} \cdot (a+b) = 184,9360067$$

Bài 2: Tính: $S = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{10000\sqrt{9999}+9999\sqrt{10000}}$

Hướng dẫn:

Ta có thể viết:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 n - n^2 (n+1)} = \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\text{ĐS: } S = \frac{99}{100}$$

CHUYÊN ĐỀ 10

TOÁN THỰC TẾ - TOÁN NGÂN HÀNG

1. Lý thuyết:

*Lãi ngân hàng: có 2 cách tính lãi

1/Lãi đơn: Khi gửi a (đồng) vào ngân hàng với lãi suất $x\%/năm$ thì sau 1 năm ta nhận được số tiền lãi là: $a \cdot x\%$ (đồng)

Số tiền lãi này nhận được hàng năm như nhau.

2/Lãi kép: Sau 1 đơn vị thời gian (tháng, năm), lãi được gộp vào vốn và được tính lãi.

–Cách tính lãi khi gửi có kì hạn:

Giả sử số tiền gửi là a (đồng), Kỳ hạn m tháng, Lãi là $x\%/năm$, Tiền lãi 1 kỳ hạn là T . Cách tính lãi cho một kỳ hạn như sau:

$T = \frac{a \cdot x\%}{12} \cdot m$. Sau khi hết 1 kỳ hạn, ngân hàng sẽ tự động gộp lãi vào vốn để tính lãi cho kỳ hạn tiếp theo

Ví dụ 1: Bài toán tính bằng lãi kép:

Hàng tháng 1 người gửi vào ngân hàng a (đồng) với lãi suất $x\%/ tháng$. Tính xem đến tháng thứ k người đó nhận được bao nhiêu tiền cả gốc lẫn lãi?

Hướng dẫn:

Gọi T là tổng số tiền nhận được ở cuối tháng thứ k .

–Cuối tháng thứ nhất số tiền trong sổ tiết kiệm của người đó là:

$$a (1 + x\%) \text{ (đồng)}$$

–Vì hàng tháng người ấy tiếp tục gửi vào ngân hàng a đồng nên số tiền gốc đầu tháng thứ hai là:

$$\begin{aligned} a (1 + x\%) + a &= a \cdot [(1 + x\%) + 1] = \frac{a \cdot [(1 + x\%) + 1] \cdot [(1 + x\%) - 1]}{(1 + x\%) - 1} \\ &= \frac{a}{1 + x\% - 1} \cdot [1 + x\%^2 - 1] = \frac{a}{x\%} \cdot [1 + x\%^2 - 1] \end{aligned}$$

Số tiền cuối tháng thứ hai là:

$$= \frac{a}{x\%} \cdot \left[1 + x\% - 1 \right] + \frac{a}{x} \cdot \left[1 + x\% - 1 \right] \cdot x\%$$

$$= \frac{a}{x\%} \cdot \left[1 + x\% - 1 \right] \cdot 1 + x\% = \frac{a}{x\%} \cdot \left[1 + x\% - 1 + x\% \right]$$

Tương tự, số tiền gốc đầu tháng 3 là:

$$= \frac{a}{x\%} \cdot \left[1 + x\% - 1 + x\% \right] + a = \frac{a}{x\%} \cdot \left[1 + x\% - 1 + x\% + x\% \right]$$

$$= \frac{a}{x\%} \cdot \left[1 + x\% - 1 \right]$$

Số tiền cuối tháng cuối tháng thứ 3 là:

$$= \frac{a}{x\%} \cdot \left[1 + x\% - 1 \right] \cdot 1 + x\% = \frac{a}{x\%} \cdot \left[1 + x\% - 1 + x\% \right]$$

Tương tự: số tiền trong sổ tiết kiệm cuối tháng thứ k là:

$$T = \frac{a}{x\%} \cdot \left[1 + x\% - 1 \right] \cdot 1 + x\%$$

Chú ý: Một số bài toán khác yêu cầu tính k hoặc x% hoặc a . . .

Để tính k, ta viết lại như sau:

$$T = \frac{a}{x\%} \cdot \left[1 + x\% - 1 \right] \cdot 1 + x\% \Rightarrow 1 + x\% = \frac{T \cdot x\%}{a \cdot 1 + x\%} + 1$$

$$k = \log_{1+x\%} \left(\frac{T \cdot x\%}{a \cdot 1 + x\%} + 1 \right)$$

Áp dụng: $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1, b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases} \quad (b \leq 0 \text{ thì phương trình vô nghiệm})$

Cách giải khác: trong trường hợp k không lớn, ta áp dụng dãy lặp để tính như sau:

Phân tích:

–Cuối tháng thứ nhất, số tiền trong sổ tiết kiệm của người đó là:

$A(1 + x\%)$ gán kết quả này vào A

–Cuối tháng thứ 2 ta cũng có: $A(1 + x\%)$ lại gán tiếp vào A

Ta thấy đây chính là dãy lặp để tính tiền vốn và lãi ở cuối tháng; khi thực hiện trên máy ta thêm biến đếm M để quản lý tháng tính lãi như sau:

Nhập vào máy dãy lặp: $M=M+1 : A=A(1 + x\%)$

Bấm CALC máy hỏi M? và A? ta nhập: M = 0; A = số tiền gửi hàng tháng

Thực hiện dãy lặp bằng cách bấm liên tiếp dấu “=” đến khi thấy trên màn hình m=k; ta thu được tổng số tiền vốn và lãi trong sổ ở tháng thứ k.

Ví dụ 2: Bài toán về Tiền lương: Một người hiện có mức lương là A, biết rằng sau 3 năm tăng lương một lần, mỗi lần tăng $x\%$ lương. Tính tổng số lương người đó nhận được từ bây giờ cho đến sau n năm nữa ?

Hướng dẫn:

Gọi T là tổng tiền lương người đó nhận được sau n năm:

*Trong 3 năm thứ 1 – đợt 1:

–Số tiền lương hàng tháng: A

–Tổng lương trong 3 năm (36 tháng): $36A$

*Trong 3 năm thứ 2 – đợt 2:

–Số tiền lương hàng tháng: $A + A.x\% = A(1 + x\%)$

–Tổng lương trong 3 năm: $36A(1 + x\%)$

Trong 6 năm qua, tổng tiền lương nhận được là:

$$36A + 36A(1 + x\%) = 36A [1 + (1 + x\%)]$$

*Trong 3 năm thứ 3 – đợt 3:

–Số tiền lương hàng tháng: $A(1 + x\%) + A(1 + x\%).x\% = A(1 + x\%)^2$

–Tổng lương trong 3 năm: $36 A(1 + x\%)^2$

Trong 9 năm qua, tổng tiền lương nhận được là:

$$36A [1 + (1 + x\%)] + 36 A(1 + x\%)^2 = 36A [1 + (1 + x\%) + (1 + x\%)^2]$$

Tương tự, tính tổng tiền lương đến hết đợt thứ n là:

$$36A [1 + (1 + x\%)] + 36 A(1 + x\%)^2 = 36A [1 + (1 + x\%) + (1 + x\%)^2 + \dots + (1 + x\%)^{n-1}]$$

$$= 36A \cdot \frac{1 - (1 + x\%)^n}{1 - (1 + x\%)} = 36A \cdot \frac{(1 + x\%)^n - 1}{x\%}$$

$$\boxed{\text{Vậy:}} T = 36A \cdot \frac{(1 + x\%)^n - 1}{x\%}$$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1: Bác An gửi tiết kiệm số tiền ban đầu là 20 triệu đồng theo kỳ hạn 3 tháng với lãi suất 0,72%/tháng. Sau một năm, bác An rút cả vốn lẫn lãi và gửi lại theo kỳ hạn 6 tháng với lãi suất 0,78%/tháng. Gửi đúng một số kỳ hạn 6 tháng và thêm một số tháng nữa thì bác An phải rút tiền trước kỳ hạn để sửa chữa nhà được số tiền là 29451583,0849007 đồng (chưa làm tròn). Hỏi bác An gửi bao nhiêu kỳ hạn 6 tháng, bao nhiêu tháng chưa tới kỳ hạn và lãi suất không kỳ hạn mỗi tháng là bao nhiêu tại thời điểm rút tiền? Biết rằng gửi tiết kiệm có kỳ hạn thì cuối kỳ hạn mới tính lãi và gộp vào vốn để tính kỳ hạn sau, còn nếu rút tiền trước kỳ hạn, thì lãi suất tính từng tháng và gộp vào vốn để tính tháng sau. Nêu sơ lược quy trình bấm phím trên máy tính để giải.

Hướng dẫn:

Số tiền nhận được cả vốn lẫn lãi sau 4 kỳ hạn 3 tháng và sau 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 kỳ hạn 6 tháng lần lượt là: $20000000(1 + 0,72 \times 3 \div 100)^4 (1 + 0,78 \times 6 \div 100)^A$.

Dùng phím CALC lần lượt nhập giá trị của A là 1; 2; 3; 4; 5; 6 ta được:

22804326,3 đồng; 232871568,78 đồng; 24988758,19 đồng; 26158232,06 đồng; 27382437,34 đồng; 28663935,38 đồng; 30005407,56 đồng

Ta có: $28663935,38 < 29451583,0849007 < 30005407,56$

Nên số kỳ hạn gửi sáu tháng đủ là: 6 kỳ hạn.

Giải phương trình sau, bằng dùng chức năng SOLVE và nhập cho A lần lượt là 1; 2; 3; 4; 5, nhập giá trị đầu cho X là 0,6 (vì lãi suất không kỳ hạn bao giờ cũng thấp hơn có kỳ hạn)

$$20000000(1 + 0,72 \times 3 \div 100)^4 (1 + 0,78 \times 6 \div 100)^6 (1 + X \div 100)^A - 29451583,0849007 = 0$$

$$X = 0,68\% \text{ khi } A = 4.$$

Vậy số kỳ hạn 6 tháng bác An gửi tiết kiệm là: 6 kỳ hạn; số tháng gửi không kỳ hạn là: 4 tháng và lãi suất tháng gửi không kỳ hạn là 0,68%

Bài 2 : Dân số của một quốc gia là 70 triệu người. Tỷ lệ tăng dân số trung bình hàng năm là 1,2%.

a) Trình bày cách tìm công thức tổng quát để tính số dân sau n năm .

b) Áp dụng tính dân số của quốc gia đó sau 15 năm . (kết quả lấy đến phần nguyên)

Hướng dẫn:

a. Chứng minh công thức: Gọi số dân ban đầu là a (người)

Tỷ lệ gia tăng dân số trung bình hàng năm là: r

n : thời gian tính (năm)

Ta đi đến công thức tổng quát

dân số năm thứ n là : $= a(1+r)^n$

b) Dân số quốc gia đó sau 15 năm là: $= a(1+r)^n = 70000000 \cdot \left(1 + \frac{1,2}{100}\right)^{15} \approx 83715471$ (người)

Bài 3: Một người gửi vào ngân hàng số tiền 1 triệu đồng, sau đó đầu mỗi tháng lại gửi thêm 200 ngàn đồng nữa. Số tiền gốc và lãi của tháng trước chuyển thành số tiền gốc của tháng sau. Biết lãi suất ngân hàng là 0,9% một tháng. Hỏi sau 12 tháng, người đó rút cả gốc và lãi được bao nhiêu tiền? (Làm tròn đến nghìn đồng).

Hướng dẫn:

Gọi số tiền góp tháng đầu là a , số góp tháng sau 200 000 đ là b , sau t tháng, lãi suất hàng tháng là h . Sau t tháng, có tổng số lãi + gốc là $T = a(1+h)^t + b \frac{(1+h)^t - 1 - h}{h}$.

Với $a = 1000\ 000$, $b = 200\ 000$; $h = 0,009$, $t = 12$.

có $T = 3435946,896$ đồng, ≈ 3435000 đồng.

Hoặc: $10^6 \cdot (1 + 0,9:100) \rightarrow A$ (tính lãi + gốc tháng thứ nhất, ghi vào A).

Lặp (ALPHA A + 2.10⁵) (1 + 0,9: 100) $\rightarrow A$ (tính lãi + gốc cuối tháng thứ 2, ghi vào A)

Ấn dấu = liên tiếp 10 lần, ta có kết quả: số tiền là ≈ 3436000 đồng.

Bài 4: Muốn có 1.000.000 (một triệu) đồng cả gốc lẫn lãi sau 15 tháng thì phải gửi ngân hàng mỗi tháng một số tiền bằng nhau là bao nhiêu nếu lãi suất là 0,6% tháng và tiền lãi của tháng trước được tính vào tiền gốc để tính lãi cho tháng sau?

Hướng dẫn:

Dùng công thức: $Ar = a(1+r)[(1+r)^n - 1]$, với A : Tiền rút về (1.000.000đ); a : tiền đóng hàng tháng (cần tính); r : lãi suất (0,006); n : thời gian (15). Kết quả tính được: $a = 63.530$ đ.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Một số tiền 58.000.000 đ gửi tiết kiệm theo lãi suất 0,7% tháng. Tính cả vốn lẫn lãi sau 8 tháng?

HD: Ta có: $A = 58000000(1 + 0,7\%)^8$ ĐS: 61 328 699, 87

Bài 2: Một người có 58 000 000đ muốn gửi vào ngân hàng để được 70 021 000đ. Hỏi phải gửi tiết kiệm bao lâu với lãi suất là 0,7% tháng?

HD: Số tháng tối thiểu phải gửi là: $n = \frac{\ln \frac{70021000}{58000000}}{\ln(1 + 0,7\%)}$ ĐS: 27,0015 tháng

Vậy tối thiểu phải gửi là 27 tháng.

(**Chú ý:** Nếu không cho phép làm tròn, thì ứng với kết quả trên số tháng tối thiểu là 28 tháng)

Bài 3: Số tiền 58 000 000đ gửi tiết kiệm trong 8 tháng thì lãnh về được 61 329 000đ. Tìm lãi suất hàng tháng?

HD: Lãi suất hàng tháng: $r = \sqrt[8]{\frac{61329000}{58000000}} - 1$ ĐS: 0,7%

Bài 4: Mỗi tháng gửi tiết kiệm 580 000đ với lãi suất 0,7% tháng. Hỏi sau 10 tháng thì lãnh về cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu? ĐS: 6028055,598

Bài 5: Muốn có 100 000 000đ sau 10 tháng thì phải gửi quỹ tiết kiệm là bao nhiêu mỗi tháng. Với lãi suất gửi là 0,6%?

HD: Số tiền gửi hàng tháng: $a = \frac{100000000 \cdot 0,006}{(1 + 0,006) \left[(1 + 0,006)^{10} - 1 \right]} = 9674911,478$

Nhận xét: Cần phân biệt rõ cách gửi tiền tiết kiệm:

+ Gửi số tiền a một lần ———> lấy cả vốn lẫn lãi A.

+ Gửi hàng tháng số tiền a ———> lấy cả vốn lẫn lãi A.

Cần phân tích các bài toán một cách hợp lý để được các khoảng tính đúng đắn.

Có thể suy luận để tìm ra các công thức

Các bài toán về dân số cũng có thể áp dụng các công thức trên đây.

Bài 6: Dân số tỉnh Lâm Đồng trong 2 năm tăng từ 30 000 000 người lên đến 30 048 288 người. Tính tỉ lệ tăng dân số hàng năm của tỉnh Lâm Đồng trong 2 năm đó? (Kết quả làm tròn hai chữ số thập phân)

Bài 7: Một người hàng tháng gửi vào ngân hàng số tiền là 1 000 000đ với lãi suất 0,45% một tháng. Hỏi sau 2 năm người ấy nhận được bao nhiêu tiền lãi? (làm tròn đến hàng đơn vị)

Bài 8: Một người hàng tháng gửi vào ngân hàng số tiền là 10 000 000đ với lãi suất 0,55% một tháng. Hỏi sau 2 năm người ấy nhận được bao nhiêu tiền lãi? (làm tròn đến hàng đơn vị)

Bài 9: Dân số nước ta tính đến năm 2001 là 76,3 triệu người. Hỏi đến năm 2010 dân số nước ta là bao nhiêu nếu tỉ lệ tăng dân số trung bình mỗi năm là 1,2%?

Bài 10: Đến năm 2020, muốn cho dân số nước ta có khoảng 100 triệu người thì tỉ lệ tăng dân số trung bình mỗi năm là bao nhiêu?

Bài 11: Dân số xã Hậu Lạc hiện nay là 10000 người. Người ta dự đoán sau 2 năm nữa dân số xã Hậu Lạc là 10404 người.

4.1. Hỏi trung bình mỗi năm dân số xã Hậu Lạc tăng bao nhiêu phần trăm.

4.2. Với tỉ lệ tăng dân số như vậy, hỏi sau 10 năm dân số xã Hậu Lạc là bao nhiêu?

Bài 12: Một người gửi tiết kiệm 1000 đôla trong 10 năm với lãi suất 5% năm. Hỏi người đó nhận được số tiền nhiều hơn (hay ít hơn) bao nhiêu nếu ngân hàng trả lãi suất $\frac{5}{12}\%$ tháng (làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

Bài 13: Có 480 học sinh đi dự trại hè tại ba địa điểm khác nhau. 10% số học sinh ở địa điểm một, 8,5% số học sinh ở địa điểm hai và 15% số học sinh ở địa điểm ba đi tham quan địa danh lịch sử. Địa danh lịch sử cách địa điểm một 60km, cách địa điểm hai 40km, cách địa điểm ba 30km. Để trả đủ tiền xe với giá 100đ/1người/1km, mỗi người đi tham quan phải đóng 4000đ. Hỏi có bao nhiêu người ở mỗi địa điểm đi tham quan di tích lịch sử.

Bài 14: Một người muốn rằng sau hai năm phải có 20 000 000đ (hai mươi triệu đồng) để mua xe máy. Hỏi phải gửi vào ngân hàng một khoản tiền như nhau hàng tháng là bao nhiêu, biết rằng lãi suất tiết kiệm là 0,075% tháng.

Bài 15: Số tiền 58000đ được gửi tiết kiệm theo lãi kép (Sau mỗi tháng tiền lãi được nhập thành vốn). Sau 25 tháng thì được cả vốn lẫn lãi là 84155đ. Tính lãi suất / tháng (tiền lãi của 100đ trong 1 tháng).

Bài 16: Một số tiền là 580000đ được gửi tiết kiệm theo lãi kép (sau mỗi tháng tiền lãi được cộng thành vốn) sau 25 tháng thì được cả vốn lẫn lãi là 84155đ. Tính lãi suất /tháng (tiền lãi của 100đ trong một tháng).

CHUYÊN ĐỀ 11 HÌNH HỌC

I. CÔNG THỨC

1) Hệ thức lượng trong tam giác vuông:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$AB^2 = BC \cdot BH$$

$$AC^2 = BC \cdot CH$$

$$AH^2 = BH \cdot CH$$

$$AB \cdot AC = BC \cdot AH$$

$$AH^2 = 1/AB^2 + 1/AC^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

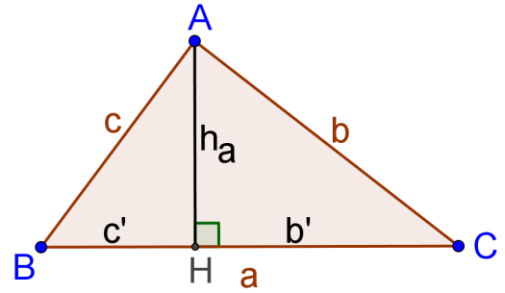
$$c^2 = a \cdot c'$$

$$b^2 = a \cdot b'$$

$$h^2 = b' \cdot c'$$

$$b \cdot c = a \cdot h$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$



2) Các hệ thức cơ bản và hệ quả:

$$1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

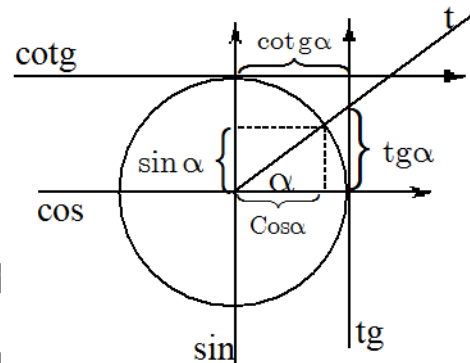
$$2) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$3) \cot g \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$4) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$5) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$6) \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$



3) Bảng giá trị của hàm số lượng giác của các góc cung đặc biệt:

Góc	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
Hàm số	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
sin	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	
cotg		$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

4) Định lý hàm số cosin:

$$1) a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

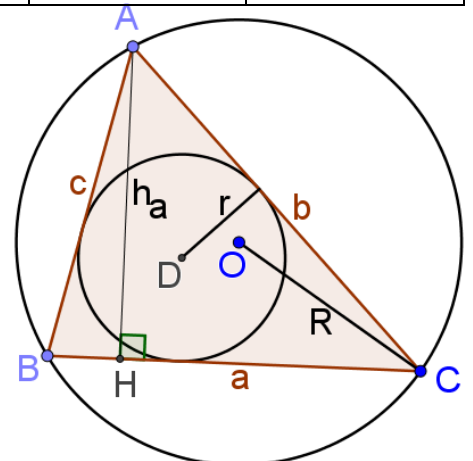
$$2) b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B$$

$$3) c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

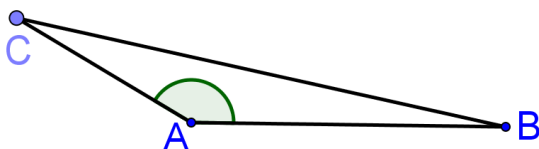
$$5) \text{Định lý hàm số sin: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Lưu ý khi dùng định lý Sin để tính góc:

Ví dụ: trong trường hợp góc A tù.



Khi đó $\sin A = \frac{BC \cdot \sin C}{AB} \Rightarrow \text{Arc}(\sin A) < 90^\circ$



Trong trường hợp này ta cần nhận ra $A > 90^\circ$ và khi đó $A = 180^\circ - \text{Arc}(\sin A)$

6) Công thức tính diện tích tam giác:

Gọi h_a là đường cao xuất phát từ đỉnh A trong $\triangle ABC$

$$p = \frac{a+b+c}{2} \text{ là nửa chu vi } \triangle ABC; S \text{ là diện tích } \triangle ABC$$

R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$

r là bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$

Khi đó :

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$$

$$S = \frac{abc}{4R} = p \cdot r$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{Công thức Héron})$$

Chu vi hình tròn : $C = 2\pi R$

Diện tích hình tròn : $S = \pi R^2$

Độ dài cung tròn : $l = \frac{\pi R n}{180}$ (n là số đo độ của cung tròn)

Diện tích hình quạt tròn : $S = \frac{\pi R^2 n}{180}$

Bán kính đường tròn nội tiếp đa giác đều n cạnh: $r = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$ r =

11) Bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác đều n cạnh: $R = \frac{a}{2 \tan \frac{180^\circ}{n}}$ R =

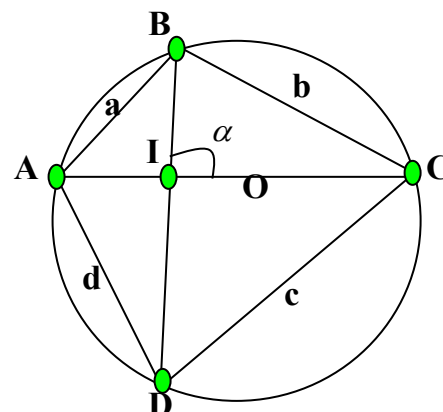
12) Bán kính đường tròn bàng tiếp góc A tam giác (r_a): $r_a = \frac{S}{p-a}$

7. Với tứ giác lồi:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cdot \cos^2 \frac{B+D}{2}}$$

$$4R \cdot S = \sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}$$

* Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) có công thức:

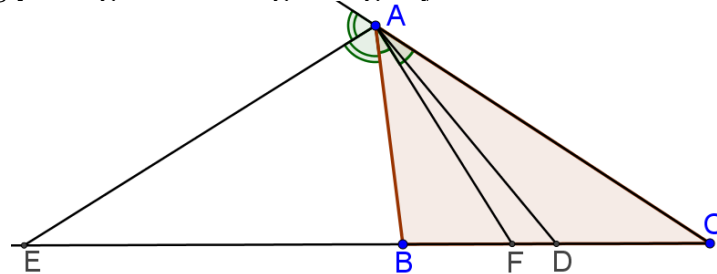


$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

* Tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (I) có công thức:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b+c+d)R = (a+c)R = (b+d)R$$

8. Tính chất đường phân giác – đường trung tuyến:

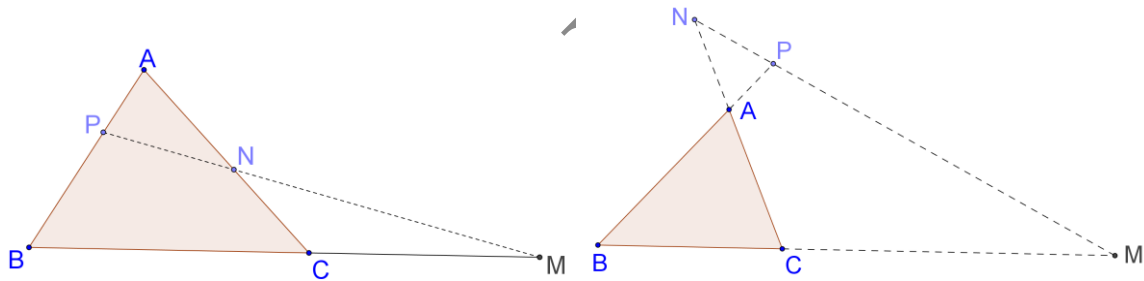


Gọi: AF là phân giác góc trong và AE là phân giác góc ngoài tại đỉnh A. AD là trung tuyến. Khi đó ta có:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{FB}{FC} = \frac{EB}{EC}$$

$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + \frac{BC^2}{2}$$

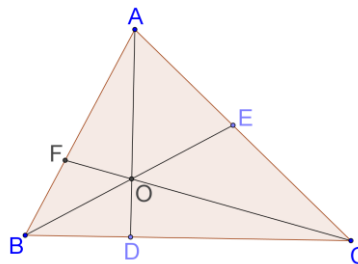
9. Định lý Mê-nê-la-uyt



Cho tam giác ABC và ba điểm M, N, P trên các đường thẳng chứa các cạnh BC, CA, AB sao cho: hoặc cả ba điểm nằm trên phần kéo dài của ba cạnh; hoặc một điểm nằm trên phần kéo dài của một cạnh, còn hai điểm kia nằm trên hai cạnh của tam giác. Điều kiện cần và đủ để M, N, P thẳng hàng là:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$$

9. Định lý Xê-ya:

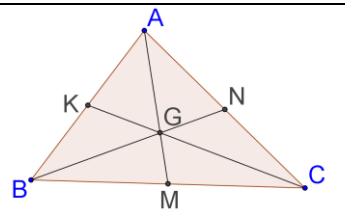


Các đường thẳng AD, BE và CF là những đường thẳng đồng quy khi và chỉ khi:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN:

Bài 1: Tam giác ABC có 3 đường trung tuyến AM, BN, CK. Tính độ dài 3 cạnh của tam giác ABC nếu giả sử: $AM=m$; $BN=n$; $CK=k$ cho trước.



Hướng dẫn:

$$\text{-Ta có: } \begin{cases} GM = \frac{1}{3} AM = \frac{1}{3} m \\ GB = \frac{2}{3} BN = \frac{2}{3} n \\ GC = \frac{2}{3} CK = \frac{2}{3} k \end{cases}$$

Tam giác BGC có GM là đường trung tuyến, ta có:

$$2BG^2 + 2GC^2 - 4GM^2 = BC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{\frac{8}{9}n^2 + \frac{8}{9}k^2 - \frac{4}{9}m^2} = \frac{2}{3}\sqrt{2n^2 + 2k^2 - m^2}$$

Học sinh cần tìm cách ghi nhớ công thức này để tính.

III. BÀI TẬP VẬN DỤNG:

Bài 1: Cho tam giác ABC có diện tích bằng đơn vị. Trên cạnh AB lấy điểm M và trên cạnh AC lấy điểm N sao cho $AM=3BM$ và $AN=4CN$. Đoạn BN cắt CM ở O. Tính diện tích của tam giác AOB và AOC.

Hướng dẫn:

Đặt $S_{AOB} = x$; $S_{AOC} = y$ ($x, y > 0$)

$$\text{Ta có } \frac{S_{OAM}}{S_{OAB}} = \frac{3}{4} \Rightarrow S_{OAM} = \frac{3x}{4};$$

$$\frac{S_{OAN}}{S_{OAC}} = \frac{4}{5} \Rightarrow S_{OAN} = \frac{4y}{5}.$$

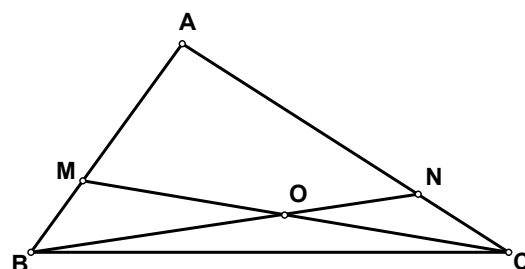
$$\text{Ta lại có: } S_{BAN} = S_{BAO} + S_{OAN} = x + \frac{4y}{5}$$

$$\text{Mà } S_{BAN} = \frac{4}{5} S_{ABC} = \frac{4}{5} \text{ nên ta có: } x + \frac{4y}{5} = \frac{4}{5} \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác } S_{CAM} = S_{COA} + S_{OAM} = y + \frac{3x}{4}, \text{ mà } S_{CAM} = \frac{3}{4} S_{ABC} = \frac{3}{4}, \text{ do đó: } y + \frac{3x}{4} = \frac{3}{4} \quad (2).$$

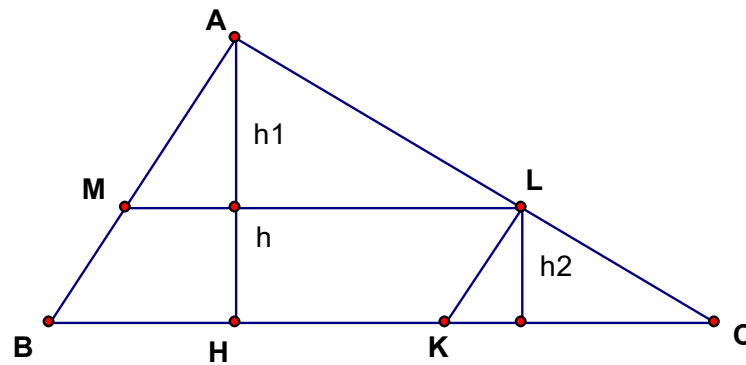
$$\text{Giải hệ phương trình (1) và (2) ta được } x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{8}.$$

$$\text{Kết quả: } S_{AOB} = \frac{1}{2}; S_{AOC} = \frac{3}{8}$$



Bài 2: Cho tam giác ABC, trên cạnh AB, AC, BC lần lượt lấy các điểm M, L, K sao cho tứ giác KLMB là hình bình hành. Biết $S_{AML} = 42,7283 \text{ cm}^2$, $S_{KLC} = 51,4231 \text{ cm}^2$. Hãy tính diện tích tam giác ABC (gần đúng với 4 chữ số thập phân).

Hướng dẫn:



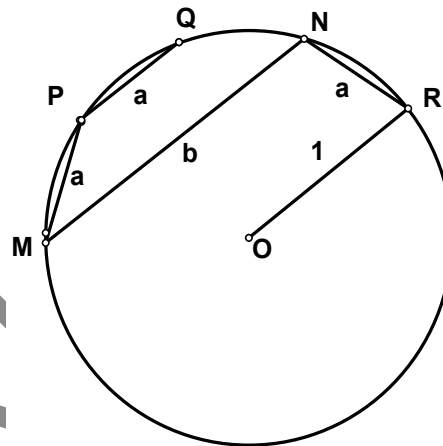
$$+ \triangle AML \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{h_1}{h}$$

$$+ \triangle LKC \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{h_2}{h}$$

$$+ \text{Suy ra: } \sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} \Rightarrow S = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2} \quad S \approx 187,9005 \text{ cm}^2$$

Bài 3: Trong hình dưới đây, dây PQ và MN song song với bán kính OR = 1. Các dây MP, PQ và NR đều có độ dài bằng a, dây MN có độ dài bằng b. Tính $a^2 - b^2$ (nêu cả cách giải).

Hướng dẫn:



Kẻ đường kính RK. Các dây KM = MP = PQ = QN = NR = a nên các cung tương ứng bằng nhau và có Sđ = $\frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$. Vẽ đường kính PL cắt MN tại T. Ta có:

$$\text{MPT} = \frac{1}{2}(180^\circ - 36^\circ) = 72^\circ$$

$$\text{MTP} = \frac{1}{2}(\text{Sđ MP} + \text{Sđ NL}) = 72^\circ.$$

Do đó $\triangle MPT$ cân tại M $\Rightarrow MT = MP = a$.

Mặt khác ORNT là hình bình hành cho ta $TN = OR = 1$;

Suy ra $MN = b = a + 1$ (1).

Lại có $TPM = TNL \Rightarrow MT \cdot TN = PT \cdot TL$ (2)

Vì $PT = OP - OT = OR - NR = 1 - a$

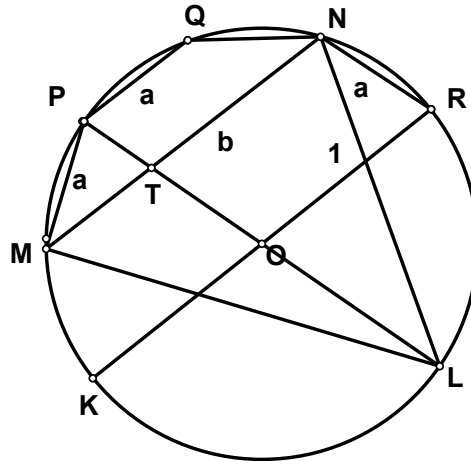
Và $TL = OT + OL = 1 + a$

Nên từ (2) $\Rightarrow a \cdot (b - a) = (1 - a)(1 + a) \Rightarrow ab = 1$ (3)

Giải hệ phương trình (1) và (3) ta được:

$$a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, b = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad (a>0, b>0).$$

$$\text{Vậy } a^2 - b^2 = -\sqrt{5} \approx -2.2361$$



Lưu ý: Cách khác: có thể dễ dàng nhận ra $\text{NOR} = 36^\circ$, từ đó tính được a và b dựa vào hệ thức lượng trong tam giác vuông: $a = \text{NR} = 2\sin 18^\circ$; $b = 2\sin 54^\circ$

Bài 4 : Để đo chiều cao từ mặt đất đến đỉnh cột cờ của Kỳ đài trước Ngọ Môn (Đại Nội – Huế), người ta cắm 2 cọc bằng nhau MA và NB cao 1,5 m (so với mặt đất) song song, cách nhau 10 m và thẳng hàng so với trục của cột cờ. Đặt giác kế đứng tại A và tại B để nhắm đến đỉnh cột cờ, người ta đo được các góc lần lượt là $51^\circ 49' 12''$ và $45^\circ 39'$ so với phương song song với mặt đất. Hãy tính gần đúng chiều cao đó.

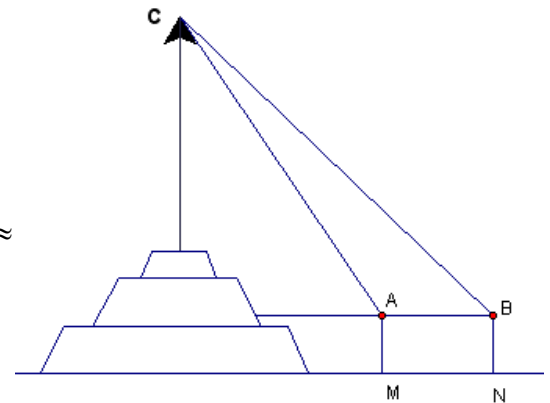
Hướng dẫn:

Xét tam giác ABC: $C = 51^\circ 49' 12'' - 45^\circ 39' = 6^\circ 10' 12''$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow AC = \frac{10 \times \sin 45^\circ 39'}{\sin 6^\circ 10' 12''}$$

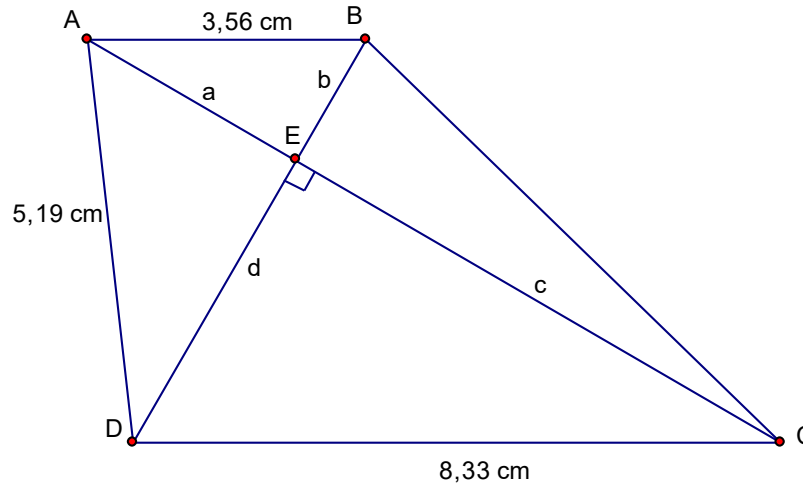
Gọi H là giao điểm của AB và trục cột cờ:

$$HC = AC \sin 51^\circ 49' 12'' = \frac{10 \times \sin 45^\circ 39' \times \sin 51^\circ 49' 12''}{\sin 6^\circ 10' 12''} \approx$$



Bài 5: Cho hình thang ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại E, hai cạnh đáy $AB = 3,56(\text{cm})$; $DC = 8,33(\text{cm})$; cạnh bên $AD = 5,19(\text{cm})$. Tính gần đúng độ dài cạnh bên BC và diện tích hình thang ABCD. Cho biết tính chất $\frac{EA}{EC} = \frac{EB}{ED} = \frac{AB}{DC}$.

Hướng dẫn:



$$a^2 + b^2 = AB^2, c^2 + d^2 = DC^2, a^2 + d^2 = AD^2$$

$$\Rightarrow 2(a^2 + d^2) + (b^2 + c^2) = AB^2 + DC^2 + AD^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = AB^2 + DC^2 - AD^2 = \frac{34454}{625} = 55.1264$$

$$BC \approx 7,424715483 \text{ (cm)}$$

Ta có:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{AB}{DC} = \frac{3,56}{8,33} = k; \quad a = kc; \quad b = kd; \quad AD^2 = a^2 + d^2 = k^2 c^2 + d^2 = k^2 c^2 + (DC^2 - c^2)$$

$$\Rightarrow (1 - k^2)c^2 = DC^2 - AD^2 \Rightarrow c^2 = \frac{DC^2 - AD^2}{1 - k^2}$$

$$c \approx 7.206892672 \Rightarrow d \approx 4.177271599; \quad a = kc \approx 3.080016556; \quad b = kd \approx 1.785244525$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} (a + c)(b + d); \quad S_{ABCD} \approx 30.66793107 \text{ (cm}^2\text{)}$$

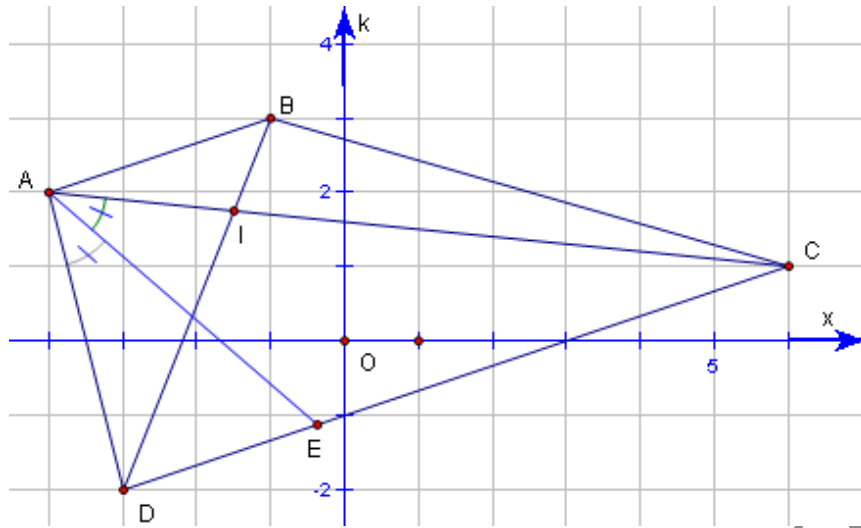
Bài 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm: $A(-4;2)$, $B(-1;3)$, $C(6;1)$, $D(-3;-2)$.

a) Tứ giác ABCD là hình gì? Tính chu vi, diện tích và chiều cao của tứ giác ABCD.

b) Tính gần đúng bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ACD.

c) Cho biết: $S = \frac{abc}{4R} = pr$ (S là diện tích; a, b, c là độ dài ba cạnh; p là nửa chu vi; R, r là bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp của tam giác).

Hướng dẫn:



a) $A(-4;2), B(-1;3); C(6;1), D(-3;-2)$

Tứ giác ABCD là hình thang,

Theo định lý Pytago, ta có: $AB = \sqrt{10}; BC = \sqrt{53}; CD = 3\sqrt{10}; AD = \sqrt{17}$.

Chu vi của hình thang ABCD là: $p = \sqrt{10} + \sqrt{53} + 3\sqrt{10} + \sqrt{17} \approx 24,0253 \text{ cm}$

Diện tích hình thang là: $S = 10 \times 5 - \frac{1}{2}(1 \times 3 + 7 \times 2 + 9 \times 3 + 1 \times 4) = 26 \text{ cm}^2$

Chiều cao của hình thang là h:

$$S = \frac{1}{2}(AB + CD)h \Rightarrow h = \frac{2S}{AB + CD} = \frac{52}{4\sqrt{10}} = \frac{13\sqrt{10}}{10} \approx 4,111 \text{ cm}$$

b) Ta có: $AC = \sqrt{10^2 + 1^2} = \sqrt{101}$

Diện tích ACD là: $S_{ACD} = \frac{1}{2}AD \times h = \frac{1}{2} \times \sqrt{17} \times \frac{13\sqrt{10}}{10} = \frac{13\sqrt{170}}{20}$ gán kết quả cho biến E.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD: $R = \frac{abc}{4S} = \frac{\sqrt{17} \times \sqrt{101} \times 3\sqrt{10}}{4E} \approx 11,5960 \text{ cm}$

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ACD:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2E}{\sqrt{17} + \sqrt{101} + 3\sqrt{10}} \approx 0,7164 \text{ cm}$$

Bài 7: Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường cao AH, AB = 9cm, AC = 12cm. Vẽ HE, HF lần lượt vuông góc với AB và AC (E ∈ AB, F ∈ AC)

a) Tính EF

b) Tính diện tích tứ giác BEFC.

Hướng dẫn:

a. Có HEAF là hình chữ nhật, nên $EF = AH \rightarrow EF = \sin C \cdot AC = \frac{AB}{BC} \cdot AC = 7,2 \text{ cm}$

$$b. S_{BEFC} = S_{ABC} - S_{AEF} = \frac{1}{2} AB \cdot AC - \frac{1}{2} AE \cdot AF = \frac{1}{2} (AB \cdot AC - AE \cdot AF)$$

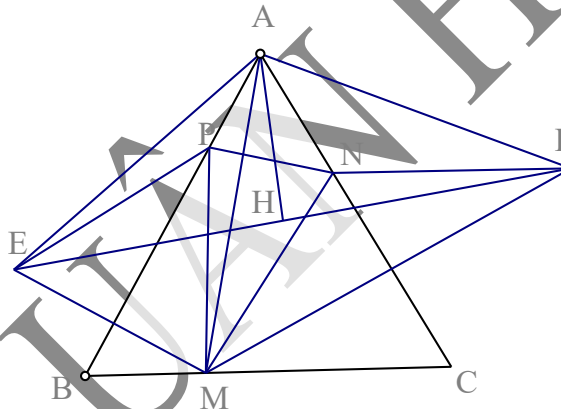
$$\text{Tính: } AE = HE = \sin C \cdot HC = \frac{9}{15} \cdot \sqrt{12^2 - 7,2^2} = 5,76(\text{cm})$$

$$AF = \sqrt{7,2^2 - 5,76^2} = 4,32(\text{cm})$$

$$\text{Vậy } S_{BEFC} = \frac{1}{2} (9 \cdot 12 - 5,76 \cdot 4,32) = 41,5584 (\text{cm}^2)$$

Bài 8: Cho tam giác đều ABC có cạnh $a = 1,2345\text{m}$. M thuộc cạnh BC sao cho $AM = \frac{a\sqrt{14}}{4}$. Gọi N và P là các điểm lần lượt thuộc AC, AB. Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác MNP (kết quả lấy 5 chữ số thập phân)

Hướng dẫn:



Gọi E, F là thứ tự là điểm đối xứng của M qua AB, AC.

Khi đó ta có: $PE = PM$, $MN = NF$

Do đó : chu vi tam giác MNP là : $EP + PN + NF \geq EF$

Ta có : $AE = AM = AF$; $\angle EAF = 120^\circ$; Kẻ AH vuông góc với EF

$$\text{Suy ra : } EF = 2MH = HE \sin 60^\circ = 2 \frac{a\sqrt{14}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a \frac{\sqrt{42}}{4} \approx 2,00012(m)$$

Vậy chu vi tam giác MNP nhỏ nhất là $2,00012\text{m}$ khi N, P là giao điểm của EF với AB, AC.

Bài 9. Cho $ABDE$ là hình chữ nhật thỏa mãn tồn tại điểm C thuộc đoạn ED sao cho tam giác ABC đều. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính $r = \sqrt[2009]{20092010} \text{ cm}$. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABDE$. Hãy tính giá trị của R .

Hướng dẫn:

$$\text{Đặt } r = \sqrt[2009]{20092010}, a = AB.$$

Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp và CP là đường cao tam giác ABC , dễ dàng tính được

$$CP = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}OC = \frac{3}{2}r, \text{ suy ra: } a = r\sqrt{3}, EA^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$\text{Từ đó tính được: } BE^2 = (2R)^2 = AB^2 + EA^2 = 3r^2 + \frac{9r^2}{4} = \frac{21r^2}{4}$$

$$\text{suy ra: } R = \frac{r\sqrt{21}}{2} = \frac{\sqrt{21} \cdot 2009\sqrt{20092010}}{2}$$

$$\text{Giá trị: } R \approx 2,3105 \text{ (cm)}$$

Bài 10. Hình chữ nhật $HOMF$ có $HO=11$ và $OM=5$. Giả sử tồn tại tam giác ABC nhận H làm trực tâm, O làm tâm đường tròn ngoại tiếp, M làm trung điểm BC và F là chân đường cao kẻ từ A . Hãy tính độ dài đoạn BC .

Hướng dẫn:

Trọng tâm G của tam giác ABC nằm trên đường thẳng HO (đường thẳng OIe), và trọng tâm này cũng nằm trên AM , cách A và M theo tỷ số $2:3$. Do vậy H cũng cách A và F theo tỷ số $2:3$, suy ra $AF = 15$.

Các tam giác vuông BFH và AFC đồng dạng vì $HBC = 90^\circ - C = CAF$

$$\text{suy ra: } BF \cdot FC = FH \cdot AF = 75.$$

$$\text{Mặt khác: } BC^2 = (BF + FC)^2 = (BF - FC)^2 + 4BF \cdot FC.$$

$$\text{Do } BF - FC = BM + MF - (MC - MF) = 2MF = 22,$$

$$\text{nên } BC = \sqrt{22^2 + 4 \cdot 75} = \sqrt{784} = 28 \text{ (đvdt)}$$

Bài 11: Cho 2009 điểm nằm trong mặt phẳng sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Xét các đoạn thẳng có đầu mút thuộc 2009 điểm đã cho sao cho với 2 điểm bất kỳ A và B , tồn tại ít nhất một điểm C nối với A và B bằng hai trong số các đoạn thẳng đó. Gọi s là số bé nhất các đoạn thẳng thoả mãn yêu cầu trên, hãy tính s .

Hướng dẫn:

Kí hiệu các điểm là $A_1, A_2, \dots, A_{2009}$. Nối A_1 với tất cả các điểm còn lại.

Về các đoạn $A_2A_3, A_4A_5, \dots, A_{n-1}A_n$. Khi đó kiểm tra được các điều kiện đề bài được thoả mãn và $s = \left\lceil \frac{3 \cdot 2009 - 3}{2} \right\rceil = 3012$ ($\lceil \cdot \rceil$: là kí hiệu phần nguyên).

Giả sử $s < 3012$. Hiển nhiên mỗi điểm phải được nối bằng một đoạn thẳng với một điểm khác. Nếu mỗi điểm được nối với ít nhất 3 điểm khác, thì $s = \frac{3 \cdot 2009}{2} > 3012$, nên tồn tại một điểm (A_1) chỉ được nối với không quá 2 điểm khác. Nếu A_1 được nối với đúng 1 điểm giả sử là (A_2), khi đó không tồn tại điểm nối với cả A_1 và A_2 như đề bài, do đó A_1 được nối với 2 điểm khác (A_2 và A_3), dễ thấy rằng A_2 nối với A_3 .

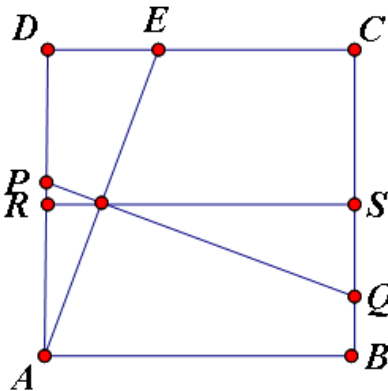
Xét cặp điểm A_1 và A_i ($i > 3$). Rõ ràng điểm nối với cả A_1 và A_i là A_2 hoặc A_3 . T

rong cả 2 trường hợp, A_i được nối với A_2 hoặc A_3 .

Vì có ít nhất 2 đoạn đi từ mỗi điểm A_i , nên số ít nhất các đoạn đi từ các điểm A_i này là $2(2009 - 3)$. Mặt khác, vì có ít nhất $2009 - 3$ đoạn từ các điểm A_i nối với A_2 hoặc A_3 nên tổng số các đoạn thẳng ít nhất bằng $3 + 2009 - 3 + \left\lceil \frac{2009 - 3}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{3 \cdot 2009 - 3}{2} \right\rceil = 3012$ (mâu thuẫn với giả thiết). Vậy $s = 3012$.

Bài 11: Cho hình vuông ABCD cạnh bằng 12 cm. Vẽ đoạn AE với E là điểm trên cạnh CD sao cho DE = 5 cm. Đường trung trực của đoạn AE cắt AE, AD và BC theo thứ tự tại M, P và Q. Tính tỉ số độ dài giữa PM và MQ.

Hướng dẫn:



Vẽ RS qua M song song với cạnh AB, CD.

Ta có: $\frac{MP}{MQ} = \frac{MR}{MS}$.

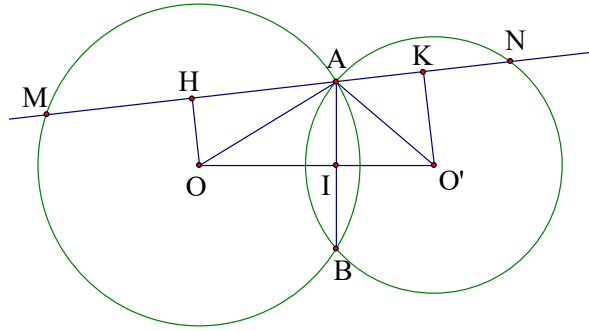
Vì RM là đường trung bình của tam giác ADE nên $MR = \frac{DE}{2}$.

Mà: $MS = RS - MR$. Vậy: $\frac{MP}{MQ} = \frac{MR}{MS} = \frac{\frac{DE}{2}}{RS - \frac{DE}{2}}$.

Áp dụng bằng số với $DE = 5 \text{ cm}$, $RS = 12 \text{ cm}$, ta có kết quả: $\frac{MP}{MQ} = \frac{5}{19} \approx 0,2632$

Bài 12: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B (O và O' nằm khác phía đối với AB). Một đường thẳng đi qua điểm A cắt (O) và (O') lần lượt tại hai điểm M và N. Tính độ dài lớn nhất của đoạn thẳng MN nếu cho biết $AB = 16 \text{ cm}$, bán kính của đường tròn tâm O và O' lần lượt là $15\sqrt{2} \text{ cm}$ và $10\sqrt{2} \text{ cm}$.

Hướng dẫn:



Gọi $I = OO' \cap AB$. Ta có: $IA = \frac{16}{2} = 8$; $AB \perp OO'$

$$OI = \sqrt{(15\sqrt{2})^2 - 8^2} \approx 19,6469; \quad IO' = \sqrt{(10\sqrt{2})^2 - 8^2} \approx 11,6619$$

$$\Rightarrow OO' = OI + IO'$$

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của MA, AN. Ta có:

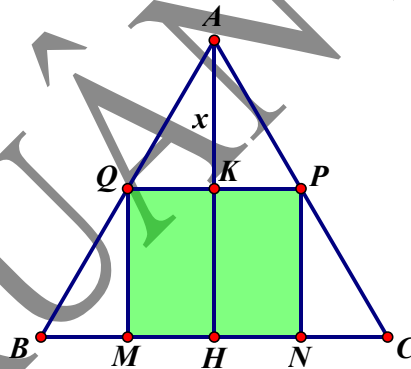
$OH \perp MA$; $OK \perp AN \Rightarrow OHKO'$ là hình thang vuông $\Rightarrow HK \leq OO'$

$\Rightarrow HK$ lớn nhất $\Leftrightarrow HK = OO' \Leftrightarrow MN = 2OO'$

Do đó : $MN = 62,6176$ cm

Bài 13: Một miếng bìa hình tam giác đều ABC, cạnh $a=30,1234$ cm. Em hãy tìm cách cắt một hình chữ nhật MNPQ từ miếng bìa trên (với M, N thuộc cạnh BC, P và Q tương ứng thuộc cạnh AC và AB) sao cho S_{MNPQ} lớn nhất. Hãy tính diện tích của hình chữ nhật MNPQ khi đó?

Hướng dẫn:



Gọi H là hình chiếu của A xuống cạnh BC, K là giao điểm của AH với PQ, đặt $AK=x$; $PQ=y$; $AH=h$. Ta có:

$$S_{ABC} = S_{AQP} + S_{PQBC} \Rightarrow \frac{ah}{2} = \frac{xy}{2} + \frac{y+a}{2} \frac{h-x}{2} \Rightarrow y = \frac{ax}{h}$$

$$\text{Do đó } S_{MNPQ} = y \cdot (h-x) = \frac{h-x}{h} \frac{ax}{h} = \frac{a}{h} x(h-x) = \frac{a}{h} (-x^2 + xh)$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{a}{h} \left[-\left(x - \frac{h}{2}\right)^2 + \frac{h^2}{4} \right] \leq \frac{ah}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{h}{2}$

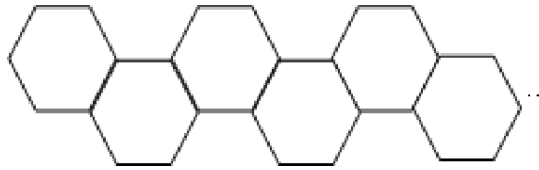
Vậy, $\max S_{MNPQ} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ khi $x = \frac{h}{2}$ hay P, Q lần lượt là trung điểm của AC, AB

Áp dụng với $a=30,1234$ cm, ta có:

$$\max S_{MNPQ} = \frac{30,1234^2 \cdot \sqrt{3}}{8} \simeq 196,4620 \text{ cm}^2$$

Bài 14: Một hình H được tạo bởi các lục giác đều xếp liên tiếp như hình vẽ dưới đây. Biết cạnh của hình lục giác đều bằng $15,01 \text{ cm}$ và chu vi của hình H (chu vi H là tổng độ dài các cạnh bao quanh không kể các cạnh chung giữa hai lục giác liền kề) là $1208,305 \text{ m}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu hình lục giác đều tạo nên hình H ?

Hướng dẫn:



Gọi số lục giác đều cần dùng là n ($n \in \mathbb{N}^*$), chu vi của H là p ($p > 0$)

$$p = n \cdot 4a + 2a$$

Ta có phương trình: $\Rightarrow n = \frac{p - 2a}{4a}$

$$\text{Thay số ta có: } n = \frac{120830,5 - 2 \cdot 15,01}{4 \cdot 15,01} = 2012$$

Bài 15 : Cho ngũ giác lồi $ABCDE$, biết diện tích các tam giác: ABC , BCD , CDE , DEA , EAB đều bằng 1 cm^2 . Gọi $s(X)$ là diện tích của hình X . Tính $s(ABCDE)$

Hướng dẫn:

Do $s(ABC) = s(ABE)$ nên C và E cách đều AB , tức $CE \parallel AB$. Tương tự chứng minh được các đường chéo còn lại song song với các cạnh tương ứng.

Gọi P là giao của BD và CE . Đặt $s(BCP) = x$.

Do $ABPE$ là hình bình hành, nên $s(BPE) = s(ABE) = 1$, và do đó:

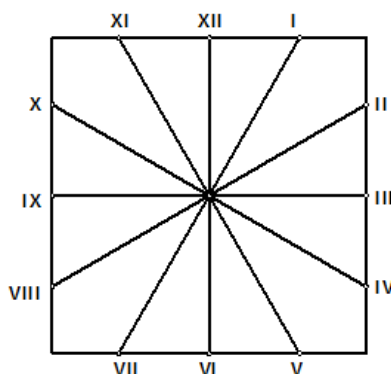
$$s(ABCDE) = s(ABE) + s(BPE) + s(CDE) + s(BCP) = 3 + x.$$

$$\text{Rõ ràng: } \frac{s(BCP)}{s(PCD)} = \frac{BP}{PD} = \frac{s(BEP)}{s(PED)}, \text{ tức là: } \frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\Rightarrow s(ABCDE) = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow s(ABCDE) \approx 3,618033989 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Vẽ một tấm bìa lên mặt đồng hồ hình vuông và dùng các vị trí chỉ giờ làm các đường biên (xem hình). Nếu t là diện tích của 1 trong 8 miền tam giác (như miền giữa 12 giờ và 1 giờ) và T là diện tích của 1 trong 4 tứ giác (như tứ giác giữa 1 giờ và 2 giờ). Tính tỷ số $\frac{T}{t}$. ĐS: $\frac{T}{t} \approx 1,4641$



Bài 2: Cho tứ giác lồi ABCD có diện tích bằng $\frac{2011}{2010\sqrt{2011}}$ (dm²). Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lấy các điểm tương ứng K, L, M, N sao cho AK : KB = 2, BL : LC = 1 : 3, CM : MD = 1, DN : NA = 1 : 2. Tính diện tích đa giác AKLCMN theo đơn vị cm².

Hướng dẫn:

Kí hiệu $s(X)$ là diện tích hình X. Nối A với L, C với M; nối L với K; M với N. Kí hiệu: $s(BLK)=S_1$, $s(DMN)=S_2$. Dễ thấy: $S = 12.S_1 + 12.S_2$, suy ra:

$$S_1 + S_2 = \frac{S}{12} \Rightarrow s(AKLCMN) = S - \frac{S}{12} = \frac{11S}{12}$$

$$\text{Đáp số: } s(AKLCMN) = \frac{11}{12} \cdot \frac{2011}{2010\sqrt{2011}} \cdot 100 (\text{cm}^2) = 183,6453859 (\text{cm}^2).$$

Bài 3: Một hình vuông và một hình tam giác đều cùng nội tiếp một hình tròn có bán kính bằng 1cm, sao cho một cạnh của tam giác song song với một cạnh của hình vuông. Gọi S là diện tích phần chung của tam giác và hình vuông. Hãy tính các giá trị S (lấy 9 chữ số sau dấu phẩy).

$$\text{ĐS: } S = \frac{9\sqrt{2} + 2\sqrt{6} - 6\sqrt{3}}{6} \approx 1,205766117 (\text{cm}^2)$$

Bài 4. Cho $\triangle BMA$ có góc $BMA = 135^\circ$; $BM = 2$; $MA = \sqrt{6}$. Lấy điểm C nằm cùng phía điểm M đối với đường thẳng AB sao cho $\triangle CAB$ vuông cân ở A . Gọi S là diện tích $\triangle ABC$. Tính S .

$$\text{ĐS: } S = 5 + 2\sqrt{3}$$

Bài 5. Cho tứ giác ABCD có $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 12$, $DA = 13$, góc $CBA = 90^\circ$. Gọi S là diện tích của tứ giác ABCD. Hãy tính giá trị của S .

$$\text{ĐS: Đáp số: } 36$$

Bài 6. Cho tam giác đều $A_1A_2A_3$, gọi A_{n+3} là trung điểm của đoạn A_nA_{n+1} với $n = 1, 2, 3, \dots$. Gọi α là số đo của góc $A_{2008}A_{2009}A_{2007}$. Tính giá trị của α .

$$\text{ĐS: Suy ra góc } A_{2008}A_{2009}A_{2007} = \text{góc } A_4A_5A_3 = 120^\circ$$

Bài 7. Cho ABDE là hình chữ nhật thoả mãn tồn tại điểm C thuộc đoạn ED sao cho tam giác ABC đều. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính $r = \frac{2009}{2010\sqrt{2010}}$ cm. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABDE. Hãy tính giá trị của R .

$$\text{ĐS: } R \approx 2,3105 (\text{cm})$$

Bài 8. Trong $\triangle ABC$ trên cạnh AB lấy 2 điểm U, R ; cạnh BC lấy 2 điểm Q, T ; cạnh CA lấy 2 điểm SP sao cho $PQ \parallel AB, SR \parallel BC, TU \parallel CA$. Đoạn PQ cắt 2 đoạn SR, TU tương ứng tại 2 điểm X, Y ; đoạn SR cắt đoạn TU tại điểm Z . Giả sử mỗi đoạn PQ, RS, TU đều chia $\triangle ABC$ thành 2 phần có diện tích bằng nhau và diện tích $\triangle XYZ$ bằng 1 m^2 . Kí hiệu $s(ABC)$ là diện tích của $\triangle ABC$. Tính các giá trị: $s(ABC) =$ $s(ABC) \approx$

ĐS: $s(ABC) = 34 + 24\sqrt{2} \text{ (m}^2\text{)}$ $s(ABC) \approx 67,9411254970 \text{ (m}^2\text{)}$

Bài 9. Hình chữ nhật $HOMF$ có $HO=11$ và $OM=5$. Giả sử tồn tại tam giác ABC nhận H làm trực tâm, O làm tâm đường tròn ngoại tiếp, M làm trung điểm BC và F là chân đường cao kẻ từ A . Hãy tính độ dài đoạn BC .

ĐS: $BC = \sqrt{22^2 + 4,75} = \sqrt{784} = 28$

Bài 10: Cho tam giác ABC có các độ dài của các cạnh $AB = 4,71 \text{ cm}$, $BC = 6,26 \text{ cm}$ và $AC = 7,62 \text{ cm}$. Hãy tính độ dài của đường cao BH , đường trung tuyến BM và đoạn phân giác trong BD của góc B (M và D thuộc AC). Tính gần đúng diện tích tam giác BHD .

ĐS: $BH \approx 3.863279635$; $AD \approx 3,271668186$

$\cos A \approx 0,572034984$; $BD \approx 3,906187546$

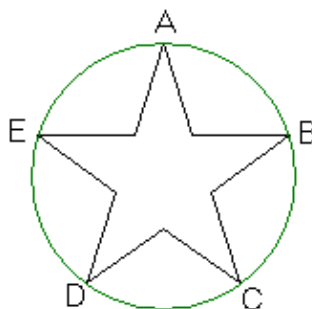
$S_{BHD} = 1,115296783 \text{ cm}^2$; $BM \approx 4,021162767$

Bài 11:

1. Cho tam giác ABC vuông ở A với $AB=4,6892 \text{ cm}$; $BC=5,8516 \text{ cm}$. Tính góc ABC (bằng đơn vị đo độ), tính độ dài đường cao AH và phân giác trong CI .

2. Cho ngôi sao 5 cánh như hình bên.

Các khoảng cách giữa hai đỉnh không liên tiếp của ngôi sao $AC=BD=CE= \dots = 7,516 \text{ cm}$. Tìm bán kính R của đường tròn đi qua 5 đỉnh của ngôi sao.



Bài 12: Cho tam giác ABC vuông cân ở A . Trên đường cao AH , lấy các điểm D, E sao cho $AE=HD= \frac{1}{4}AH$. Các đường thẳng BE và BD lần lượt cắt cạnh AC ở F và G . Biết $BC=7,8931 \text{ cm}$.

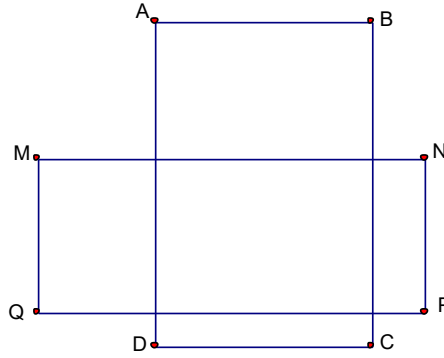
a) Tính diện tích tam giác ABE

b) Tính diện tích tứ giác $EFGD$

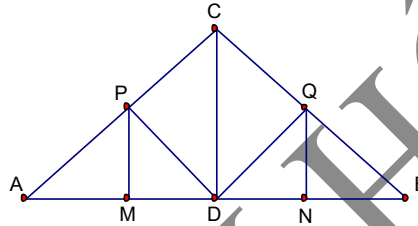
Bài 13: Hai hình chữ nhật cắt nhau:

a. Kí hiệu $S_1 = k^2$ là diện tích tứ giác $ANCQ$; S_2 là diện tích tứ giác $BPDM$. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$

b. Biết $AB = 5 \text{ cm}$; $BC = 7 \text{ cm}$; $MQ = 3 \text{ cm}$; $MN = 9 \text{ cm}$. Tính k ?



Bài 14: Người ta phải làm một vì kèo bằng sắt. Biết $AB \approx 4,5\text{cm}$; $\frac{CD}{BD} = \frac{1}{3}$; $AM = MD = DN = NB$. Viết công thức và tính độ dài sắt làm vì kèo biết hao phí khi sản xuất là 5% (làm tròn đến mét).



Bài 15: Đa giác, hình tròn:

* Một số công thức:

1) Đa giác đều n cạnh, độ dài cạnh là a :

+ Góc ở tâm: $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ (rad), hoặc: $\alpha^\circ = \frac{360}{n}$ (độ)

+ Góc ở đỉnh: $A = \frac{n-2}{n}\pi$ (rad), hoặc $A = \frac{n-2}{n} \cdot 180$ (độ)

+ Diện tích: $S = \frac{na}{4} \cot \frac{\alpha}{2}$

2) Hình tròn và các phần hình tròn:

+ Hình tròn bán kính R :

– Chu vi: $C = 2\pi R$

– Diện tích: $S = \pi R^2$

+ Hình vành khăn:

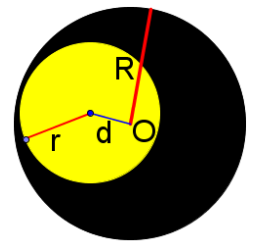
– Diện tích: $S = \pi(R^2 - r^2) = \pi(2r + d)d$

+ Hình quạt:

– Độ dài cung: $l = \alpha R$; (α : rad)

– Diện tích: $S = \frac{1}{2} R^2 \alpha$ (α : rad)

$= \frac{\pi R^2 a}{360}$ (a : độ)



Bài 16: Ba đường tròn có cùng bán kính 3 cm đôi một tiếp xúc ngoài (Hình vẽ)

Tính diện tích phần xen giữa ba đường tròn đó ?

Hướng dẫn:

$$S_{\text{gạch xọc}} = S_{\Delta O_1 O_2 O_3} - 3 S_{\text{quạt}}$$

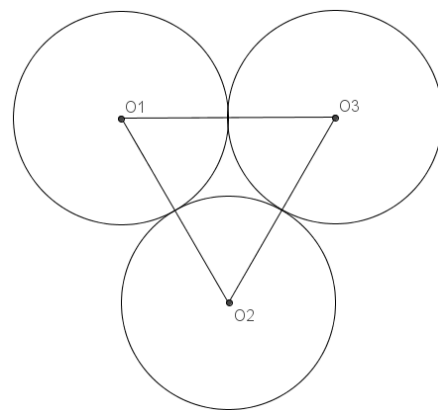
Tam giác $O_1 O_2 O_3$ đều, cạnh bằng 1 nên:

$$S_{\Delta O_1 O_2 O_3} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

$$S_{\text{quạt}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} = \frac{\pi \cdot 9 \cdot 60}{360} = \frac{3\pi}{2}$$

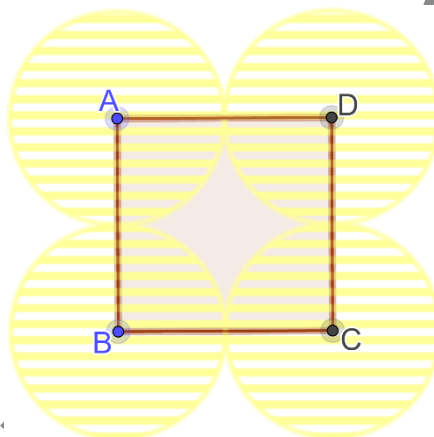
$$\Rightarrow S_{\text{gạch xọc}} = S_{\Delta O_1 O_2 O_3} - 3$$

$$S_{\text{quạt}} = 9\sqrt{3} - \frac{9\pi}{2} = \frac{18\sqrt{3} - 9\pi}{2} \approx 1,451290327$$



Bài 17: Cho hình vuông ABCD, cạnh $a = 5,35$. Dựng các đường tròn tâm A, B, C, D có bán kính $R = \frac{a}{2}$. Tính diện tích xen giữa 4 đường tròn đó.

Hướng dẫn:



$$S_{\text{gạch}} = S_{ABCD} - 4S_{\text{quạt}}; \quad S_{\text{quạt}} = \frac{1}{4} S_{\text{H.tròn}} = \frac{1}{4} \pi R^2$$

$$\Rightarrow S_{\text{gạch}} = a^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \pi R^2 = a^2 - \frac{1}{4} \pi a^2 = a^2 \left(1 - \frac{1}{4} \pi\right) \approx 6,142441068$$

Bài 18: Cho đường tròn tâm O, bán kính $R = 3,15$ cm. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến AB và AC (B, C là hai tiếp điểm thuộc (O)). Tính diện tích phần giới hạn bởi hai tiếp tuyến và cung tròn nhỏ BC. Biết $OA = a = 7,85$ cm.

Hướng dẫn:

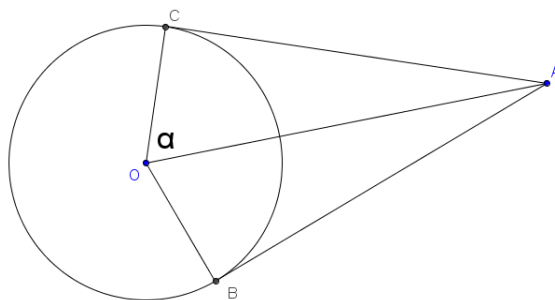
$$\text{– Tính } \alpha: \cos \alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{a} = \frac{3,15}{7,85}$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1} \frac{3,15}{7,85}$$

$$S_{OBAC} = 2S_{OBA} = aR \sin \alpha$$

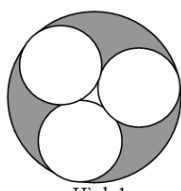
$$S_{\text{quạt}} = \frac{\pi R^2 \cdot 2\alpha}{360} = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{180}$$

$$S_{\text{gạch}} = S_{OBAC} - S_{\text{quạt}} = aR \sin \alpha - \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{180} \approx 11,16 \text{ (cm}^2\text{)}$$

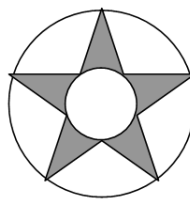


Bài 19: Tính diện tích phần được tô đậm trong hình tròn đơn vị ($R = 1$) (Xem hình 1)

Bài 20: Tính tỷ lệ diện tích của phần được tô đậm và diện tích phần còn lại trong hình tròn đơn vị (Xem hình 2)



Hình 1



Hình 2

Bài 14. Tính diện tích phần hình phẳng (phần gạch xọc) giới hạn

bởi các cung tròn và các cạnh của tam giác đều ABC (xem hình vẽ),

biết: $AB = BC = CA = a = 5,75 \text{ cm}$.

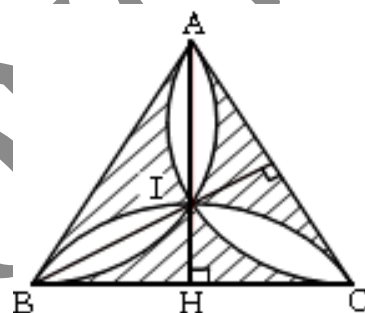
Hướng dẫn:

$$R = OA = OI = IA = \frac{2}{3} AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Suy ra: } R = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ và } AOI = 60^\circ.$$

Diện tích hình gạch xọc bằng diện tích tam giác ABC trừ diện tích hình hoa 3 lá

(gồm 6 hình viên phân có bán kính R và góc ở tâm bằng 60°).



$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad S_{\Delta O_1AI} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

$$\text{Diện tích một viên phân: } \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}.$$

$$\text{Tính theo } a, \text{ diện tích một viên phân bằng: } \frac{a^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{36};$$

$$S_{\text{gạch xọc}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - 6 \cdot \frac{a^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{36} = \frac{a^2(9\sqrt{3} - 4\pi)}{12}; \quad S_{\text{gạch xọc}} = \frac{5,75^2(9\sqrt{3} - 4\pi)}{12}.$$

$$\text{Bấm tiếp: } 5,75 \text{ [SHIFT] } [x^2] \text{ [×] } [(9 \text{ [×] } 3 \text{ [√] } - 4 \text{ [×] } \text{[SHIFT] } [\pi] \text{ [)]}] \text{ [÷] } 12 \text{ [=]}$$

$$\text{Kết quả: } S_{\text{gạch xọc}} \approx 8,33 \text{ cm}^2.$$

Bài 15: Viên gạch cạnh $a = 30 \text{ cm}$ có hoa văn như hình vẽ.

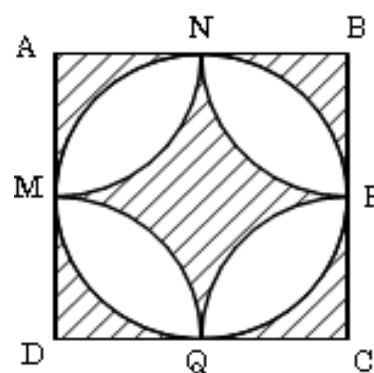
a) Tính diện tích phần gạch xọc của hình đã cho, chính xác đến 0,01 cm.

b) Tính tỉ số phần trăm giữa diện tích phần gạch xọc và diện tích viên gạch.

Giải: a) Gọi R là bán kính hình tròn.

Diện tích S một hình viên phân bằng:

$$S = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{4}(\pi - 2) = \frac{a^2}{16}(\pi - 2).$$



Vậy diện tích hình gồm 8 viên phân bằng $\frac{a^2}{2}(\pi - 2)$.

Diện tích phần gạch xọc bằng: $a^2 - \frac{a^2(\pi - 2)}{2} = \frac{a^2(4 - \pi)}{2}$.

Tính trên máy: 30 [SHIFT] [x²] [Min] [x] [(4 [SHIFT] [π])] [÷] 2 [=]

[MODE] [7] [2] (386.28) Vậy $S_{\text{gạch xọc}} \approx 386,28 \text{ cm}^2$.

ấn phím tiếp: [÷] [MR] [SHIFT] [%] (42.92)

Tỉ số của diện tích phần gạch xọc và diện tích viên gạch là 42,92%.

Đáp số: 386,28 cm²; 42,92 %.

Bài 16: Nhân dịp kỷ niệm 990 năm Thăng Long, người ta cho lát lại đường ven hồ Hoàn Kiếm bằng các viên gạch hình lục giác đều. Dưới đây là viên gạch lục giác đều có 2 màu (các hình tròn cùng một màu, phần còn lại là màu khác).

Hãy tính diện tích phần gạch cùng màu và tỉ số diện tích giữa hai phần đó,

biết rằng $AB = a = 15 \text{ cm}$.

Giải: Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều

là: $R = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Diện tích mỗi hình tròn là: $\pi R^2 = \frac{\pi a^2}{12}$

Diện tích 6 hình tròn là: $\frac{\pi a^2}{2}$.

Tính trên máy: 15 [SHIFT] [x²] [x] [π] [÷] 2 [=] [Min] (353.4291)

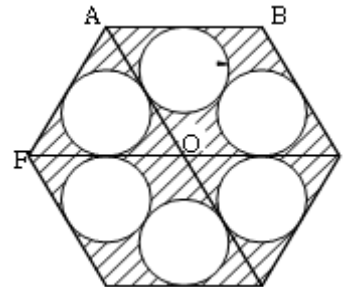
Diện tích toàn bộ viên gạch là: $6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích phần gạch xọc là: $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi a^2}{2}$.

Bấm tiếp phím: 3 [x] 15 [SHIFT] [x²] [x] 3 [√] [÷] [=] [-] [MR] [=] (231.13797)

ấn tiếp phím: [÷] [MR] [SHIFT] [%] Kết quả: 65.40

Đáp số: 353,42 cm² (6 hình tròn); 231,14 cm² (phần gạch xọc); 65,40 %



Bài 17: Viên gạch hình lục giác đều ABCDEF có hoa văn hình sao như hình vẽ, trong đó các đỉnh hình sao M, N, P, Q, R, S là trung điểm các cạnh của lục giác.

Viên gạch được tô bằng hai màu (màu của hình sao và màu của phần còn lại).

Biết rằng cạnh của lục giác đều là $a = 16,5$ cm.

+ Tính diện tích mỗi phần (chính xác đến 0,01).

+ Tính tỉ số phần trăm giữa hai diện tích đó.

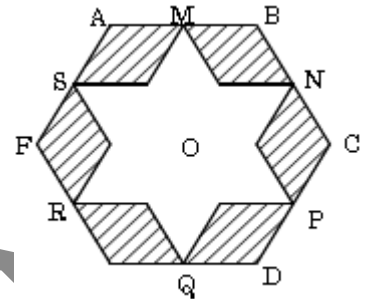
Giải: Diện tích lục giác $ABCDEF$ bằng: $S_1 = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}$.

Lục giác nhỏ có cạnh là $b = \frac{a}{2}$, 6 cánh sao là các tam giác đều

cũng có cạnh là $b = \frac{a}{2}$. Từ đó suy ra: diện tích lục giác đều cạnh

b là S_2 bằng: $S_2 = \frac{3b^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{8}$, diện tích 6 tam giác đều cạnh

b là S_3 : $S_3 = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{8}$.



Tính trên máy: $3 \times 16.5 \text{ [SHIFT] } [x^2] \times 3 \text{ [√] } \div 8 \times 2 = \text{ [MODE] } [7] [2] (353.66) \text{ [Min]}$

ấn tiếp phím: $3 \times 16,5 \text{ [SHIFT] } [x^2] \times 3 \text{ [√] } \div 2 = \text{ [=] } \text{ [MR] } = (353.66)$

ấn tiếp phím: $\div \text{ [MR] } \text{ [SHIFT] } [\%] \text{ Kết quả: } 100$.

Vậy diện tích hai phần bằng nhau.

Lời bình: Có thể chứng minh mỗi phần có 12 tam giác đều bằng nhau, do đó diện tích hai phần bằng nhau. Từ đó chỉ cần tính diện tích lục giác đều và chia đôi.

Bài 18: Cho lục giác đều cấp 1 $ABCDEF$ có cạnh $AB = a = 36 \text{ mm}$. Từ các trung điểm của mỗi cạnh dựng một lục giác đều $A'B'C'D'E'F'$ và hình sao 6 cánh cũng có đỉnh là các trung điểm A', B', C', D', E', F' (xem hình vẽ). Phần trung tâm của hình sao là lục giác đều cấp 2 $MNPQRS$. Với lục giác này ta lại làm tương tự

như đối với lục giác ban đầu $ABCDEF$ và được

hình sao mới và lục giác đều cấp 3. Đối với

lục giác cấp 3, ta lại làm tương tự như trên

và được lục giác đều cấp 4. Đến đây ta dừng lại.

Các cánh hình sao cùng được tô bằng một màu

(gạch xọc), còn các hình thoi trong hình chia thành

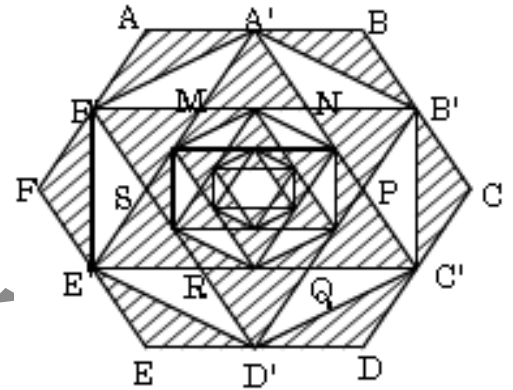
2 tam giác và tô bằng hai màu: màu gạch xọc

và màu "trắng". Riêng lục giác đều cấp 4 cũng được tô màu trắng.

a) Tính diện tích phần được tô bằng màu "trắng" theo a .

b) Tính tỉ số phần trăm giữa diện tích phần "trắng" và diện tích hình lục giác ban đầu.

Giải: a) Chia lục giác thành 6 tam giác đều có cạnh là a bằng 3 đường chéo đi qua 2 đỉnh đối xứng qua tâm, từ đó ta có $S = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}$. Chia lục giác $ABCDEF$ thành 24 tam giác đều có cạnh bằng $\frac{a}{2}$. Mỗi tam giác đều cạnh $\frac{a}{2}$ có diện tích bằng diện tích tam giác "trắng" $A'NB'$ (xem hình vẽ). Suy ra diện tích 6 tam giác trắng vòng ngoài bằng $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ diện tích lục giác cấp 1 $ABCDEF$.



Vậy diện tích 6 tam giác trắng vòng ngoài là: $\frac{1}{4} \cdot \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}$. (1)

b) Tương tự với cách tính trên ta có: $MN = b = \frac{a}{2}$; $c = \frac{b}{2}$.

Diện tích 6 tam giác trắng của lục giác cấp 2 $MNPQRS$ là: $\frac{1}{4} \cdot \frac{3b^2 \sqrt{3}}{2}$. (2)

Diện tích 6 tam giác trắng của lục giác cấp 3 là: $\frac{1}{4} \cdot \frac{3c^2 \sqrt{3}}{2}$. (3)

Diện tích lục giác trắng trong cùng bằng (với $d = \frac{c}{2}$): $\frac{3d^2 \sqrt{3}}{2}$. (4)

Tóm lại ta có:

$$S_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2^3}; \quad S_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{3b^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2 \cdot 2^2} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2^5};$$

$$S_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{3c^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2 \cdot 4^2} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2^7}; \quad S_4 = \frac{3d^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2 \cdot 8^2} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2^7}.$$

$$S_{\text{trắng}} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 3a^2 \sqrt{3} \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{2}{2^7} \right) = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2^4 + 2^2 + 2}{2^6}.$$

ấn phím: $3 \times 36 \text{ [SHIFT] } [x^2] \times 3 \text{ [sqrt] } \div 2 \text{ [MODE] } [7] [2] (3367.11) \text{ [Min]}$

Vậy $S_{ABCDEF} = 3367,11 \text{ mm}^2$.

ấn tiếp phím: $2 \text{ [SHIFT] } [x^y] 4 \text{ [÷] } 2 \text{ [SHIFT] } [x] \text{ [÷] } 2 \text{ [÷] } 2 \text{ [SHIFT]}$

$\boxed{x^y}$ $\boxed{6}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$ (1157.44) Vậy $S_{\text{trắng}} \approx 1157,44 \text{ mm}^2$.

ấn tiếp phím: $\boxed{\div}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{\%}$ (34.38). Vậy $\frac{S_{\text{trắng}}}{S_{\text{ABCDEF}}} \approx 34,38\%$.

Đáp số: 1157,44 mm² và 34,38%.

Bài 19: Cho hình vuông cấp một $ABCD$ với độ dài cạnh là $AB = a = 40 \text{ cm}$. Lấy A, B, C, D làm tâm, thứ tự vẽ các cung tròn bán kính bằng a , bốn cung tròn cắt nhau tại M, N, P, Q . Tứ giác $MNPQ$ cũng là hình vuông, gọi là hình vuông cấp 2. Tương tự như trên, lấy M, N, P, Q làm tâm vẽ các cung tròn

bán kính MN , được 4 giao điểm E, F, G, H

là hình vuông cấp 3. Tương tự làm tiếp được

hình vuông cấp 4 $XYZT$ thì dừng lại (xem hình vẽ).

a) Tính diện tích phần hình không bị tô màu (phần để trắng theo a).

b) Tìm tỉ số phần trăm giữa hai diện tích tô màu và không tô màu.

Giải: a) Tính diện tích 4 cánh hoa trắng cấp 1 (bằng 4 viên phân trừ đi 2 lần diện tích hình vuông cấp 2).

$$S_1 = 4 \cdot \left(\frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \right) - 2b^2 \quad (b \text{ là cạnh hình vuông cấp 2}).$$

Tương tự, tính diện tích 4 cánh hoa trắng cấp 2 và cấp 3:

$$S_2 = 4 \left(\frac{\pi b^2}{4} - \frac{b^2}{2} \right) - 2c^2 \quad (c \text{ là cạnh hình vuông cấp 3}).$$

$$S_3 = \left(\frac{\pi c^2}{4} - \frac{c^2}{2} \right) - 2d^2 \quad (d \text{ là cạnh hình vuông cấp 4}).$$

Rút gọn: $S_1 = a^2(\pi - 2) - 2b^2$; $S_2 = b^2(\pi - 2) - 2c^2$; $S_3 = c^2(\pi - 2) - 2d^2$;

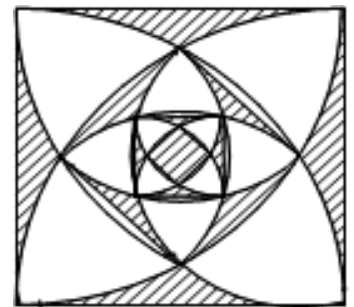
$$S_{\text{trắng}} = S_1 + S_2 + S_3 = \pi(a^2 + b^2 + c^2) - 4(b^2 + c^2) - 2(a^2 + d^2).$$

b) Ta có: $MCQ = 30^\circ$; $b = QM = 2MK = 2a \cdot \sin 15^\circ = a(2\sin 15^\circ)$.

Tương tự: $c = 2b \cdot \sin 15^\circ = a(2\sin 15^\circ)^2$; $d = 2c \cdot \sin 15^\circ = a(2\sin 15^\circ)^3$.

Ký hiệu $x = 2\sin 15^\circ$, ta có: $b = a \cdot x$; $c = ax^2$; $d = ax^3$.

Thay vào công thức tính diện tích $S_{\text{trắng}}$ ta được:



$$S_{\text{trắng}} = \pi(a^2 + a^2 x^2 + a^2 x^4) - 4(a^2 x^2 + a^2 x^4) - 2(a^2 + a^2 x^6) \\ = \pi a^2(1 + x^2 + x^4) - 4a^2(x^2 + x^4) - 2a^2(1 + x^6)$$

ấn phím: 15 $\boxed{0,}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^y}$ 4 $\boxed{+}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$

$$\boxed{+} 1 \boxed{=} \boxed{\times} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\pi} \boxed{\times} 40 \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{x^2} \boxed{-} 4 \boxed{\times} 40 \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{x^2} \boxed{\times}$$

$$\boxed{[(} \boxed{\text{MR}} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{x^2} \boxed{+} \boxed{\text{MR}} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{x^y} 4 \boxed{)]} \boxed{-} 2 \boxed{\times} 40 \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{x^2} \boxed{\times}$$

$$\boxed{[(} 1 \boxed{+} \boxed{\text{MR}} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{x^y} 6 \boxed{=} \boxed{\text{MODE}} \boxed{7} \boxed{2} (1298.36) \boxed{\text{Min}}$$

Vậy $S_{\text{trắng}} \approx 1298,36 \text{ cm}^2$.

Bấm tiếp phím: 40 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$ (301.64)

Vậy $S_{\text{gạch xọc}} \approx 301,64 \text{ cm}^2$.

Bấm tiếp phím: $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\%}$ (23.23)

Vậy $\frac{S_{\text{gạch xọc}}}{S_{\text{trắng}}} \approx 23,23\%$.

Đáp số: $1298,36 \text{ cm}^2$; $23,23\%$.

Bài 20: Cho tam giác đều ABC có cạnh là $a = 33,33 \text{ cm}$ và tâm là O . Vẽ các cung tròn qua hai đỉnh và trọng tâm O của tam giác được hình 3 lá. Gọi A', B', C' là các trung điểm các cạnh BC, CA và AB . Ta lại vẽ các cung tròn qua hai trung điểm và điểm O , ta cũng được hình 3 lá nhỏ hơn.

a) Tính diện tích phần cắt bỏ (hình gạch xọc) của tam giác ABC để được hình 6 lá còn lại.

b) Tính tỉ số phần trăm giữa phần cắt bỏ và diện tích của tam giác ABC .

Giải: $A'B'C'$ cũng là tam giác đều

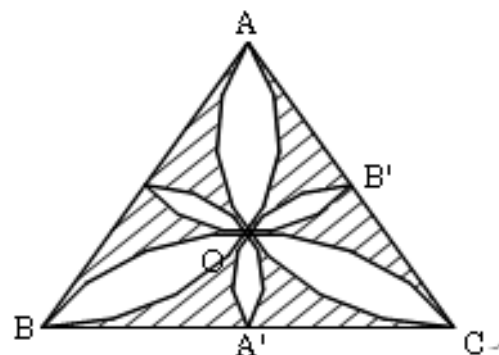
nhận O làm tâm (vì AA', BB', CC' cũng là các đường cao, đường trung tuyến của $\Delta A'B'C'$). 6 chiếc lá chỉ có điểm chung duy nhất là O , nghĩa là không có phần diện tích chung.

Mỗi viên phân có góc ở tâm bằng 60° , bán kính bằng $\frac{2}{3}$ đường cao tam giác đều. Gọi S_1 là diện tích 1 viên phân.

$$\text{Khi ấy } S_1 = \frac{\pi OA^2}{6} - \frac{OA^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{OA^2}{12} (2\pi - 3\sqrt{3}).$$

$$\text{Ta có: } OA = \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Gọi S là diện tích 3 lá lớn, S' là diện tích 3 lá nhỏ. Khi ấy:



$$S = 6S_1 = \frac{OA^2}{2} (2\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{a^2}{6} (2\pi - 3\sqrt{3}).$$

Gọi cạnh tam giác đều $A'B'C'$ là b , tương tự ta cũng có:

$$S' = \frac{b^2}{6} (2\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{a^2}{24} (2\pi - 3\sqrt{3}).$$

Tổng diện tích 6 lá là: $S + S' = (2\pi - 3\sqrt{3}) \left(\frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{24} \right).$

Diện tích phần gạch xọc (phần cắt bỏ) là S'' .

$$S'' = S_{\Delta ABC} - (S + S') = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - (2\pi - 3\sqrt{3}) \left(\frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{24} \right) = \left(\frac{7\sqrt{3}}{8} - \frac{5}{12}\pi \right) a^2.$$

Tính $S_{\Delta ABC}$: $33.33 \text{ [SHIFT] } [x^2] \times 3 \text{ [sqrt] } \div 4 \text{ [=]} (481.0290040) \text{ [Min]}$

Tính S'' : $7 \times 3 \text{ [sqrt] } \div 8 \text{ [-]} 5 \div 12 \times \pi \text{ [=]} \times 33.33 \text{ [SHIFT] } [x^2] \text{ [=]} (229.4513446)$

Vậy $S'' \approx 229,45 \text{ cm}^2$.

án tiếp phím để tính $\frac{S''}{S_{ABC}}$: $\div \text{ [MR] [SHIFT] [%] } \text{ Kết quả: } 47.70$

Đáp số: $S'' \approx 229,45 \text{ cm}^2$; $\frac{S''}{S_{ABC}} \approx 47,70 \%$.

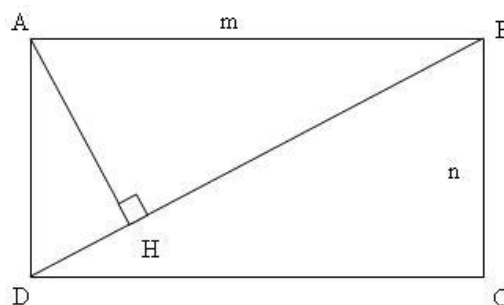
HÌNH HỌC TỰ LUYỆN

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A. Từ A kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Tính độ dài cạnh AB (chính xác đến 2 chữ số thập phân), biết rằng diện tích tam giác AHC là $S = 4,25 \text{ cm}^2$, độ dài cạnh AC là $m = 5,75 \text{ cm}$.

(Bài 10 đề thi HSGMT Toàn quốc năm 2009, môn Toán 9 THCS)

Kết luận: $AB = 1.59 \text{ cm}$ hoặc $AB = 20.77 \text{ cm}$

Bài 2



Hình chữ nhật ABCD có độ dài các cạnh $AB = m$, $BC = n$. Từ A kẻ AH vuông góc với đường chéo BD.

a. Tính diện tích tam giác ABH theo m , n .

b. Cho biết $m = 3,15 \text{ cm}$ và $n = 2,43 \text{ cm}$. Tính (chính xác đến 4 chữ số thập phân) diện tích tam giác ABH. **ĐS: 2.399376279**

(Trích đề thi HSGMT Toàn quốc năm 2009, môn Toán 9 THCS)

Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết $AB=5,2538\text{m}$, góc $\hat{C}=40^\circ 25'$. Từ A vẽ đường phân giác AI và trung tuyến AM (I và M thuộc BC)

- Tính độ dài của các đoạn thẳng AI, AM.
- Tính tỉ số diện tích tam giác AIM và diện tích tam giác ABC

(Trích đề thi HSGMT Sóc Trăng. lớp 9. 2008-2009)

AI = 4,016248663 m; AM = 4,055193785 m; b) 0,040082662

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A. Phân giác của góc A cắt BC tại D. Biết $BD=3,178$; $BC = 8,916$. Tính AB, AC.

ĐS: Đặt $x=AB, y=AC$; $x=4,319832473 \Rightarrow y=7,799622004$

Bài 5: Tam giác ABC vuông tại A có cạnh $AB = a = 2,75\text{ cm}$, góc $C = \alpha = 37^\circ 25'$. Từ A vẽ các đường cao AH, đường phân giác AD và đường trung tuyến AM.

- Tính độ dài của AH, AD, AM
- Tính diện tích tam giác ADM

(Kết quả lấy với 2 chữ số ở phần thập phân)

(Trích bài 7: Đề thi toán Casio toàn quốc khối THCS - 13/03/2007)

AH = 2.18; AD = 2.20; AM = 2.26; $S_{ADM} = 0.33$

Bài 6: Cho ΔABC có $AB = 3,5\text{cm}$; $AC = 4,5\text{cm}$ và góc $A = 90^\circ$. Kẻ đường cao AH và đường phân giác AI của tam giác ABC (H, I thuộc BC)

- Tính độ dài BC, AH, BH, BI.
 - Tính diện tích của ΔABC .
- viết kết quả chính xác đến 0,01)

(Trích bài 7: Đề thi toán Casio khối THCS - Quận Tân Phú - TP. HCM - 2007/2008)

BC = 5,70 cm; BH = 2,15 cm; BI = 2,49 cm; AH = 2,76 cm; $S_{ABC} = 7,88\text{ cm}^2$

Bài 7: Cho hình thang vuông ABCD (hình). Biết rằng $AB = a = 2,25\text{cm}$; góc $(ABD) = \alpha = 50^\circ$, diện tích hình thang ABCD là $S = 9,92\text{cm}^2$. Tính độ dài các cạnh AD, DC, BC và số đo: góc(ABC), góc(BCD).

AD = 2.681445583 (cm); DC = 5.148994081 (cm); BC = 3.948964054 (cm)

$BCD = 42^\circ 46' 3,02''$; $ABC = 137^\circ 13' 56,98''$

Bài 8: Tam giác ABC có cạnh $AC = b = 3,85\text{cm}$; $AB = c = 3,25\text{cm}$ và đường cao $AH = h = 2,75\text{cm}$

- Tính các góc A, B, C và cạnh BC của tam giác.
 - Tính độ dài của trung tuyến AM (M thuộc BC).
 - Tính diện tích tam giác AHM.
- (góc tính đến phút, độ dài và diện tích lấy kết quả với 2 chữ số thập phân)

(Trích đề thi HSGMT Toàn quốc năm 2007, lớp 9 THCS)

$B=57^\circ 47'$; $C=45^\circ 35'$; $A=76^\circ 37'$; $AM=2.83\text{cm}$; $S_{AHM}=0.59\text{ cm}^2$

Bài 9: Cho ΔABC có $B = 120^\circ$, $AB = 6,25\text{cm}$, $BC = 12,5\text{cm}$. Đường phân giác của góc B cắt AC tại D.

- Tính độ dài của đoạn thẳng BD.
- Tính tỉ số diện tích của các tam giác ABD và ABC.
- Tính diện tích tam giác ABD.

$BD = 4,166666667$; b) $\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{1}{3}$; $S_{ABD} \approx 11,2763725$

Bài 10: Cho ΔABC có đường trung tuyến CM, AN, BP cắt nhau tại G. Giả sử $AB = 3,2$; $CM = 2,4$; $AN = 1,8$. Hãy tính:

- Đường cao GH của tam giác AGM
- Diện tích tam giác ABC
- Tính độ dài đường trung tuyến còn lại của tam giác ABC.
- Tính độ dài các cạnh còn lại của tam giác ABC.

Bài 11: Tam giác ABC có cạnh $AC = 3,85\text{cm}$; $AB = 3,25\text{cm}$ và đường cao $AH = 2,75\text{cm}$.

- Tính gần đúng các góc A, B, C và cạnh BC của tam giác.
- Tính gần đúng độ dài trung tuyến AM (M thuộc BC).
- Tính gần đúng diện tích tam giác AHM.

(Góc tính đến phút. Độ dài và diện tích lấy kết quả với 2 chữ số thập phân.)

$$A \approx 76^{\circ} 37'; B \approx 57^{\circ} 48'; C \approx 45^{\circ} 35'. \quad b) \quad AM \approx 2,79\text{cm}; \quad c) S_{AHM} \approx 0,66\text{cm}^2$$

Bài 12: Cho ΔABC vuông tại C, $AB = 7,5\text{cm}$; $A = 58^{\circ}25'$. Từ C kẻ phân giác CD và trung tuyến CM.

- Tính độ dài các cạnh CA và CB
- Tính độ dài đường trung tuyến CM và phân giác CD.
- Tính diện tích ΔABC và ΔCDM .

$$AC \approx 3.928035949(\text{cm}) \quad CB \approx 6.389094896(\text{cm}); \quad CM = AB/2 = 3,75; \quad CD = 3,440098294(\text{cm}). \quad S_{ABC} = 12.54829721(\text{cm}^2); \quad S_{CDM} = 1,496641828(\text{cm}^2)$$

Bài 13: Cho ΔABC vuông tại A có $AB = 14,25\text{cm}$; $AC = 23,5\text{cm}$. AM và AD theo thứ tự là trung tuyến và phân giác của tam giác. a. Tính BD và CD b. Tính diện tích tam giác ADM

$$DB \approx 10,37435833; \quad DC \approx 17,10859093; \quad S_{ADM} \approx 20,51386589$$

Bài 14: Cho ΔABC ($A=90^{\circ}$), $AB = 3$, $ACB = 60^{\circ}$. Các đường phân giác BM và CN cắt nhau tại I

- Tính BM và CN
- Tính diện tích ΔIMN

$$NC \approx 1,154700538; \quad BM \approx 1,793150944(\text{cm}); \quad S_{IMN} = 0,056624327(\text{cm}^2)$$

CHUYÊN ĐỀ 12 ĐỀ THI THAM KHẢO

ĐỀ 1

ĐỀ THI HSG CASIO QUẬN GÒ VẤP NĂM HỌC 2013–2014

(Thời gian làm bài: 60 phút)

Bài 1: Hãy tìm tất cả các số tự nhiên là bội của 2013 có dạng $\overline{11*1**1}$

Bài 2: Tìm số tự nhiên x lớn nhất có 11 chữ số biết rằng chia x cho 19 và 31 có số dư lần lượt là 13 và 19.

Bài 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$A = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}x^2 - \frac{\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{5}}x + \frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{7}}$$

Bài 4: Tìm số dư khi chia 2010.2011.2012.2013 cho 2013.2014

Bài 5: Tìm số chính phương có dạng: $\overline{aabb}$

Bài 6: Cho $f(x) = \frac{x^2 - \sqrt{x-1}}{2x+1}$. Tính: $S = f(1) + f(3) + f(5) + \dots + f(99)$

Bài 7: Cho đa thức bậc 3, biết $f(1) = -7$; $f(2) = -16$; $f(3) = -11$; $f(4) = 20$. Tính $f(2013)$

Bài 8: Tìm hai chữ số tận cùng của 2013^{2013}

Bài 9: Cho tam giác ABC biết $AB=8,4$; $AC=11,9$; $\hat{A}=78^\circ$. Tính:

a) Đường cao BH

b) Diện tích tam giác ABC

c) Lấy M trên BC sao cho $AM=3MC$. Tính khoảng cách từ C đến AM

d) Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABM

ĐỀ 1 - B

Đề thi HSG giải toán trên máy tính Casio 2013 - 2014 TpHCM

Ngày 19/1/2014

Câu 1: Tìm số tự nhiên x có 11 chữ số biết x chia 17 dư 3, x chia 23 dư 1, x chia 29 dư 4

ĐS: 10000003826

Câu 2: Cho $A = 2011.2012.2013.2014$ và $B = 2014.2015$. Tìm số dư khi chia A cho B.

ĐS: 4009874

Câu 3: Tìm 3 chữ số tận cùng của tích $P = 1.3.5.7 \dots 2013.2015$.

ĐS: 625

Câu 4: Cho đa thức bậc 5 $P(x)$ có hệ số bậc 5 là 3, thỏa $P(x)$ chia hết cho $x^2 + 1$ và $P(0) = -1$; $P(1) = 4$; $P(2) = 85$. Tìm số dư khi $P(100) : P(5)$

ĐS: 5371

Câu 5: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất mà lập phương của nó tận cùng là 0824

ĐS: 274

Câu 6: Biết $x_1; x_2; x_3; x_4$ là 4 nghiệm của phương trình $x^4 + x^3 - 7x^2 - 4x + 6 = 0$.

Tính giá trị biểu thức $x_1^{10} + x_2^{10} + x_3^{10} + x_4^{10}$

ĐS: 27375

Câu 7: Tính đúng GTNN và GTLN của $A = \frac{1,4x-5,3}{3,7x^2+0,2x+\sqrt{3}}$

ĐS: GTLN: 0,0246

GTNN: -3,1112

Câu 8: Cho ΔABC có $AB = 4,8$; $BC = 7,2$; $AC = 6,5$. Đường phân giác BD cắt đường trung tuyến AM tại I. Tính IA, IB, bán kính đường tròn ngoại tiếp $\odot DMC$ và diện tích tứ giác MCDI.

IA $\approx$ 2,54; IB $\approx$ 3,53; $R_{CDM} \approx$ 2,01; $R_{CDIM} \approx$ 5,88

Câu 9: Cho dãy số $\{u_n\}$ được xác định bởi $x_1 = 1$; $x_2 = 2$ và $x_n = -x_{n-1} + x_{n-2} - n^2$ với $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 3$. Tính x_{29} ; x_{30} ; x_{31} ; x_{32}

$x_{29} \approx 364967$

Các giá trị tiếp theo

-588409, 954337, -1541722, 2497148, -4037714, 6536087, -10572505, 17109961, -27681022, 44792504, -72471926, 117266111, -189736273, 307004233, -496738570, 803744828, -1300481282, 2104228319, -3404707297, 2104228319,

ĐỀ 2
ĐỀ HSG GÒ VẤP NĂM 2015 – 2016
(Thời gian 60 phút)

Câu 1: Tìm chữ số * để $\overline{11111111*33333333} : 7$

Câu 2: Tìm các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn phương trình:

$$y^3 = x^3 + 2x^2y + 11xy + 11x^2$$

Câu 3: Cho đa thức $f(x)$ có tất cả các hệ số nguyên dương nhỏ hơn 8 thỏa mãn $f(8) = 20152016$. Tính tổng các hệ số của $f(x)$

Câu 4: Cho dãy số x_n thỏa mãn $x_1 = 1; x_2 = 2$; và $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$. Tìm x_{31}

Câu 5: Tìm chữ số hàng chục của số 29^{2015}

Câu 6: Biết phương trình $x^5 - 3x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + 2 = 0$ có 1 nghiệm là $x = 1 - \sqrt{2}$ và $a; b$ đều là những số nguyên. Tìm tổng bình phương tất cả các nghiệm của phương trình

Câu 7: Xác định các số hữu tỉ a và b biết:

$$\frac{5}{3\sqrt{7} + \sqrt{11}} + \frac{6}{4\sqrt{7} + 2\sqrt{11}} = a\sqrt{7} + b\sqrt{11}$$

Câu 8: Trên nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 10$ lấy 2 điểm $M; N$ sao cho:

$MON = NOB$ (M khác B). Cho biết $MAB = 50^\circ$. Tính gần đúng (2 chữ số sau dấu phẩy)

a) S_{AMNB}

b) Bán kính R đường tròn nội tiếp tam giác MNB

ĐỀ 3
ĐỀ HSG SỞ GD-ĐT TPHCM NĂM 2015 – 2016

Bài 1: Tìm số tự nhiên x nhỏ nhất có 10 chữ số biết x chia cho 17 dư 5; chia cho 29 dư 11 và chia cho 43 dư 25

Bài 2: Tìm hai chữ số tận cùng của $P = 23^{2015} + 47^{2016}$

Bài 3: Tìm tổng các ước lẻ của số 21077548

Bài 4: Tìm các số tự nhiên $\overline{abcde}$ biết $\overline{abcde} = (\overline{db})^3$

Bài 5: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất mà lập phương của nó có tận cùng là 4 chữ số 1

Bài 6: Tìm tất cả các số nguyên dương $x; y$ thỏa mãn phương trình: $x^2 + 2y = y^2 + 8x + 874$

Bài 7: Tìm ước nguyên tố nhỏ nhất của số $3689^3 + 9478777^2$

Bài 8: Đa thức bậc năm $P(x)$ có hệ số cao nhất là -1 và $P(k) = 2k^2 - k$ với $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Tính $P(15)$

Bài 9: Cho tam giác ABC có $AB = 3,7; BC = 5,2; CA = 4,8$. Đường cao BH cắt trung tuyến AM tại I

a) Tính gần đúng (chính xác đến 2 chữ số thập phân) IA, IB, IC và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IBM

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác IBM cắt AB tại J . Tính gần đúng (chính xác đến 2 chữ số thập phân) AJ

Bài 10: Tính gần đúng (chính xác đến 4 chữ số thập phân) giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \frac{1,2x + 5,9}{\sqrt{2,3x - 7,4}}$$

Bài 11: Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_1=1$; $x_2=3$ và $x_n=2x_{n-1} - 3x_{n-2} + n^2$ ($n \geq 3$)
 Tính (ghi kết quả chính xác): x_{39} ; x_{40} ; x_{41} ; x_{42} ?

ĐỀ 4

ĐỀ HSG GÒ VẤP NĂM 2016 – 2017

(Ngày thi: 28–11–2016. Thời gian 60 phút)

1. Tính tổng các ước nguyên tố của 1987526177
2. Tìm chữ số * để số $22222222 * 33333333$ chia hết cho 7
3. Tìm dư trong phép chia 21^{2016} cho 2016
4. Tìm ước nguyên tố lớn nhất của: $A = 1241^2 + 187^3 + 85^4$
5. Tìm số nhỏ nhất có tận cùng là 88888 chia hết cho 337
6. Tìm số chính phương có 3 chữ số biết rằng khi chia số đó cho tổng các chữ số của nó được thương là 64 dư 9
7. Tìm m để phương trình sau vô nghiệm:
 $(1,6 - 0,41m)(0,4x - 0,13) = (1,2x - 4,52m)(3,4 - 1,23m) - 2,3(4,5m + 3,7x)$
(Tính chính xác đến 2 chữ số thập phân)
8. Cho $g(x) = -3x^3 + 4x^2 + 2x - 7$
 $f(1) = 2g(1)$; $f(2) = 3g(2)$; $f(3) = 4g(3)$; $f(4) = 5g(4)$. Tính $f(15)$
9. Cho hình vuông ABCD cạnh bằng 7,5. Trên cạnh DC lấy điểm F sao cho $DF = 3,6$. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $CE = 2,7$. Gọi I là giao điểm AC và DE
 - a) Tính IF
 - b) Tính S_{ADFI}
 - c) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEI
 - d) Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác AEI*Tính gần đúng chính xác đến 2 chữ số thập phân*

ĐỀ 5

ĐỀ HSG SỞ GD-ĐT TPHCM NĂM 2016 – 2017

Bài 1: Cho biết $\frac{210}{5689} = \frac{1}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}}$ với x, y, z là các số tự nhiên. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = (x - y)(y - z)(z - x)$$

Bài 2: Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất biết n^2 có hai chữ số đầu là 98 và 2 chữ số cuối là 89

Bài 3: Tính tổng các chữ số của số 43^7

Bài 4: Tính tổng các ước lẻ của số 722311904

Bài 5: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất mà lập phương của nó có tận cùng là 4 chữ số 8

Bài 6: Tìm dư khi chia số $(2 + \sqrt{3})^{24} + (2 - \sqrt{3})^{24}$ cho 2017

Bài 11: Cho dãy số (x_n) xác định bởi: $x_1=1$; $x_2=2$ và $x_n=n.x_{n-1} - x_{n-2}$ ($n \geq 3$). Tính (ghi kết quả chính xác) x_{12} ; x_{13} ; x_{14} ; x_{15} ?

Bài 7: Cho $P(x)$ là một đa thức bậc 4 thỏa các điều kiện: $P(x)$ chia cho $(x^2 + 1)$ dư $2x - 1$; $P(x)$ chia cho $(x^2 + 2)$ dư $3x - 1$ và $P(1) = 2015$. Tính $P(2)$

Bài 8: Tìm GTNN (chính xác đến 4 chữ số thập phân) của biểu thức:

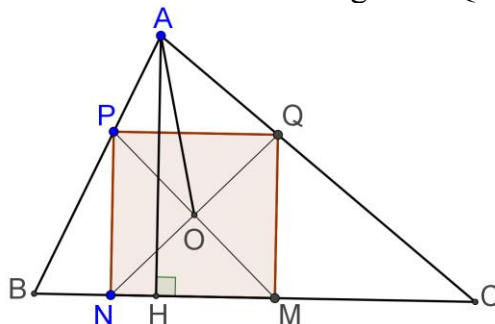
$$A = \sqrt{2,3x^2 - (\sqrt{5} + 04)x + (4 + 3\sqrt{2})^2}$$

Bài 9: Cho tam giác ABC có $AB=2,9$; $BC=4,1$; $CA=3,6$. Trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm D,E,F sao cho $AD=1,4$; $BE=1,8$ và $CF=1,2$. AE cắt DF tại M. Tính gần đúng (chính xác đến 2 chữ số thập phân sau dấu phẩy)

- Diện tích tam giác DEF
- Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF
- Độ dài đoạn MD

Bài 10: Cho tam giác ABC có $BC=15$; $CA=17$; $AB=14$. Hình vuông MNPQ có M và N thuộc cạnh BC; P và Q lần lượt thuộc cạnh AB và AC

- Tính diện tích hình vuông MNPQ
- Khoảng cách từ A đến tâm O của hình vuông MNPQ



ĐỀ 6
ĐỀ HSG GÒ VẤP NĂM 2017 – 2018
(Ngày thi: . Thời gian 60 phút)

- Bài 1:** Tìm các số tự nhiên là bội của 2017 có dạng $19920**05$ ĐS: 199209005
- Bài 2:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất mà bình phương của nó có tận cùng là 4176 ĐS: 724
- Bài 3:** Tìm dư trong phép chia $2017^{2018} : 270$ ĐS: 199
- Bài 4:** Tìm ước nguyên tố lớn nhất của số $A = 731^2 + 187^2 + 10115$ ĐS: 401
- Bài 5:** Tìm chữ số thập phân thứ 2017 sau dấu phẩy trong phép chia 4 cho 43 ĐS: 0
- Bài 6:** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+3,7}{\sqrt{2,3x-5,3}}$ ĐS: 3,23

Bài 7: Tìm số tự nhiên n biết $5294300011 \cdot n$ có 2589984 ước số

Bài 8: Cho đa thức $g(x) = 3x^3 + 4x^2 + 2x + 2017$ và $f(x)$ là đa thức bậc 3 sao cho:

$f(1)=3g(1)$; $f(2)=4g(2)$; $f(3)=5g(3)$; $f(4)=6g(4)$. Tính $f(5)$

ĐS: 17442

Bài 9: Tính tổng sau:

$$\left[\sqrt{1} \right] + \left[\sqrt{2} \right] + \left[\sqrt{3} \right] + \dots + \left[\sqrt{2018} \right] \text{ ở đây } [x] \text{ là số nguyên lớn nhất không vượt quá } x$$

ĐS: 59466

Bài 10: Cho tam giác ABC có góc $C = 36^\circ$, đường cao $BH = 2,5$, trung tuyến $AM=3,2$. BH cắt AM tại I. Tính gần đúng (chính xác đến 2 chữ số thập phân) AB; BC; CA; IA; IB; IC, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IBM

$AB \approx 2,78$; $BC \approx 4,25$; $AC \approx 4,67$; $IA \approx 1,33$; $IB \approx 1,98$; $IC \approx 3,48$; $R \approx 1,16$

ĐỀ 7
ĐỀ HSG SỞ GD-ĐT TPHCM NĂM 2017 – 2018

Bài 1: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất mà lập phương của nó có tận cùng là 0824

Bài 2: Cho $M = 7 + 77 + 777 + 7777 + \dots + 77\dots777$ (có 2018 số hạng) và $N = 3 - 33 + 333 - 3333 + \dots + 33\dots333$ (có 2017 số hạng)

Tìm 3 chữ số tận cùng của tích M.N

Bài 3: Tìm số tự nhiên Q lớn nhất sao cho khi chia các số $A = 8381947$; $B = 83814526$; $C = 838147105$ cho Q thì ta được cùng một số dư

Bài 4: Tính tổng tất cả các ước số của số 71500021 có chữ số tận cùng là 7

Bài 5: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $4x^2(2x+3y^2) + y^4(6x+y+y^2) = 3193330$

Bài 6: Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $n+1930$ và $n+2539$ đều là số chính phương

Bài 7: Cho $P(x)$ là một đa thức bậc ba có $P(1) = \frac{1}{2}$; $P(2) = \frac{2}{3}$; $P(3) = \frac{3}{4}$; $P(4) = \frac{4}{5}$. Tính chính xác giá trị của $P(39)$

Bài 8: Tính gần đúng (chính xác đến 4 chữ số thập phân) giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{2,3x^2 - 3,4x + 5,6}{0,3x^2 + 1,9}$

Bài 9: Cho tam giác ABC có $AB=5,7$; $BC=8,3$; $CA=7,6$ đường trung tuyến AM cắt phân giác BD tại I. Tính (chính xác đến 2 chữ số thập phân)

a) IA, IB, IC

b) Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác CDM

c) Bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác CDM

d) Diện tích S của tứ giác CDIM

Bài 10: Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1=1$; $x_2=2$ và $x_n = n.x_{n-1} - x_{n-2} + n^2 (n \geq 3)$. Tính (ghi kết quả chính xác) x_{12} ; x_{13} ; x_{14} ; x_{15} ?

ĐỀ 8

ĐỀ HSG GÒ VẤP NĂM 2018 – 2019

(Ngày thi: 4/12/2018. Thời gian 60 phút)

Bài 1: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất mà lập phương của nó có tận cùng là 4 chữ số 1 **ĐS: 8471**

Bài 2: Tìm số tự nhiên n biết 4537694462041^n có 5320000 ước số **ĐS: 9**

Bài 3: Tìm dư trong phép chia $2018^{2019} : 719$ **ĐS: 520**

Bài 4: Tìm ước nguyên tố lớn nhất của số $A = 731^2 + 187^3 + 14161^2$ **ĐS: 577**

Bài 5: Tìm chữ số thập phân thứ 2019 sau dấu phẩy trong phép chia 17 cho 43 **ĐS: 5**

Bài 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1,9x + 2,7}{\sqrt{3x - 4,3}}$ (KQ ghi chính xác 2 chữ số thập phân)

ĐS: 3,71

Bài 7: Tìm dư khi chia số $(2 + \sqrt{3})^{27} + (2 - \sqrt{3})^{27}$ cho 2018 **ĐS: 1584**

Bài 8: Cho đa thức bậc ba $f(x)$ sao cho $f(x)$ chia cho $x^2 + 1$ dư $2x - 1$, chia cho $x^2 + x$ dư $9x - 2$ Tính $f(2018)$ **ĐS: 24649787260**

Bài 9: Tính tổng sau: $[\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + [\sqrt{4}] + \dots + [\sqrt{2018}]$ ở đây $[\sqrt{x}]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x **ĐS: 59465**

Bài 10: Cho tam giác ABC có $AB=3,7$; $BC=5,2$; $CA=4,8$. Đường cao BH cắt trung tuyến AM tại I. Tính (ghi kết quả chính xác đến 2 chữ số thập phân)

a) Độ dài IA, IB, IC

b) Bán kính đường tròn ngoại tiếp IBM

ĐS: IA $\approx$ 1,18; IB $\approx$ 2,94; IC $\approx$ 3,84, R $\approx$ 1,52

ĐỀ 9

ĐỀ THI HSG CASIO TPHCM NĂM HỌC 2018–2019

(ngày thi 20/1/2019)

Bài 1: Cho số $\overline{2354ab241}$:99. Tính $a^2 + b^2$ **ĐS: 113**

HD: Dùng dãy lặp: $\overline{2354ab241} = (2354 \cdot 10^5 + \overline{ab} \cdot 10^3 + 241) : R99$ cho $\overline{ab}$ chạy từ 0 đến 99 đến khi được số 87 thì chia hết.

Bài 2: Tìm số chính phương có 3 chữ số biết rằng khi chia số đó cho tổng các chữ số của nó thì được thương là 64 và dư là 9 **ĐS: 841**

Bài 3: Tính tổng tất cả các số tự nhiên có 3 chữ số $\overline{abc}$ với $\overline{abc} = c^5 + 20(a+b+c)$ **ĐS: 1168**

Bài 4: Tính giá trị của biểu thức $2x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 14x + 13$ biết $\frac{x+1}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}$ **ĐS: 8**

Bài 5: Cho đa thức bậc bốn $P(x)$ biết $P(x)$ chia hết cho $x^2 - 1$, $P(x)$ chia cho $x^2 + 2$ được dư là $3x - 1971$ và $P(2) = 2019$. Tính $P(5)$ **ĐS: 17592**

HD: $P(x) : x^2 - 1$ nên $P(1) = P(-1) = 0$

Ta có: $P(x) = (x^2 + 2)(ax^2 + bx + c) + 3x - 1971$

$$\text{Với } P(1) = P(-1) = 0 \text{ và } P(2) = 2019 \text{ ta được hệ: } \begin{cases} a+b+c=656 \\ a-b+c=658 \\ 4a+2b+c=664 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \\ c=654 \end{cases}$$

Bài 6: Cho hai số tự nhiên x, y thỏa mãn $y^3 = x^3 + 2x^2y + 11xy + 11x^2$. Biết y có hai chữ số, tìm giá trị lớn nhất của y **ĐS: 84**

$$\begin{aligned} y^3 &= x^3 + 2x^2y + 11xy + 11x^2 && \Leftrightarrow x^3 + x^2y + x^2y - y^3 + 11xy + 11x^2 = 0 \\ &&& \Leftrightarrow x^2(x+y) + y(x-y)(x+y) + 11x(x+y) = 0 \\ &&& \Leftrightarrow (x+y)(x^2+xy-y^2+11x) = 0 \end{aligned}$$

– Với $x, y \in \mathbb{N}$ nên $x+y=0 \Leftrightarrow x=y=0$. Loại vì y có 2 chữ số

– Với: $x^2+xy-y^2+11x=0 \Leftrightarrow y^2-xy-x^2-11x=0$ có: $\Delta = 5x^2 + 44x$

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{-44}{5} \vee x \geq 0. \text{ Vì } y > 0 \text{ nên ta lấy: } y = \frac{x + \sqrt{5x^2 + 44x}}{2}$$

Cho x chạy đến khi $x = 49$ ta được **ĐS**.

Bài 7: Biết phương trình $x^5 + ax^2 + bx - 1 = 0$ có 1 nghiệm là $x = 1 - \sqrt{2}$ và a, b đều là những số nguyên. Tính $a^2 + b^2$ **ĐS: 170**

Bài 8: Tính gần đúng (chính xác đến 4 chữ số thập phân) giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{3,7x-8,2}}{1,2x+2,3} \quad \text{ĐS: 0,3942}$$

Bài 9: Cho tam giác ABC có các góc A, C nhọn; BC=3,5; Đường cao BH=2,7 và bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 2,8. Gọi K là giao điểm của BH và trung tuyến AM. Tính (chính xác đến 2 chữ số thập phân)

a) Độ dài các cạnh AB, AC và trung tuyến AM của tam giác ABC

b) Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM

c) Diện tích S của tứ giác CHKM

$$\text{ĐS: } AB=4,32; \quad AC=5,60; \quad AM=4,68 \quad R=2,34 \quad S=2,07$$

Bài 10: Cho dãy số x_n được xác định bởi $x_1 = 1$; $x_2 = 1$ và $x_n = x_{n-1} - nx_{n-2} + 2n^2$ ($n \geq 3$). Tính (ghi kết quả chính xác): x_{18} ; x_{19} ; x_{20} ;... thí sinh có thể tính các số hạng tiếp theo nếu còn thời gian

$$\text{ĐS: } x_{18} = 226930758 \quad x_{19} = -3071956174 \quad x_{20} = -7610570534$$

ĐỀ 10

ĐỀ HSG QUÂN GÒ VẤP NĂM HỌC 2019 – 2020

Bài 1: Tìm ước nguyên tố lớn nhất của số: $303265^2 + 30785^2 + 31047^3$ **ĐS: 16983431**

Bài 2: Tìm chữ số thập phân thứ 2019 sau dấu nháy của số $2,(08) + 1,2(912)$ **ĐS: 2**

Bài 3: Tìm hai chữ số tận cùng của số 2019^{2019} . **ĐS: 79**

Bài 4: Cho đa thức bậc ba $f(x)$ sao cho $f(x)$ chia cho $x^2 + 1$ dư $6 - 4x$, chia cho $x^2 + 2x$ dư $25x + 4$. Tính $f(2019)$? **ĐS: 41142713596**

Bài 5: Hai số hữu tỉ a, b thỏa mãn đẳng thức: $\frac{11}{2\sqrt{7}+3\sqrt{5}} + \frac{23}{4\sqrt{7}+3\sqrt{5}} = a\sqrt{7} + b\sqrt{5}$. Tính $\frac{a}{b}$

(Ghi kết quả dưới dạng phân số) **ĐS: $\frac{a}{b} = \frac{15}{173}$**

Bài 6: Tính gần đúng (chính xác đến 4 chữ số thập phân sau dấu phẩy) giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{2,5x - 3,2}{1,2x^2 - 1,3x + 8,9}$ **ĐS: GTLN: 0,2970; GTNN: -0,5129**

Bài 7: Tìm số tự nhiên n biết 102474749131^n có 365056 ước số. **ĐS: $n=15$**
 $102474749131 = 19^2 \cdot 29^3 \cdot 103 \cdot 113$

Bài 8: Tìm số tự nhiên X lớn nhất có 9 chữ số biết X chia cho 13 dư 5, chia cho 37 dư 23 và chia cho 23 dư 18. **ĐS: $X=999999837$**

Bài 9: Cho tam giác ABC có góc $C = 47^\circ$, đường cao $BH = 2,9$ cm, trung tuyến $AM = 3,5$ cm. BH cắt AM tại I . Tính gần đúng (chính xác đến 4 chữ số thập phân sau dấu phẩy) độ dài các đoạn thẳng AB, BC, CA, IA, IB, IC .

ĐS: $AB \approx 3,4309; BC \approx 3,9652; CA \approx 4,5377; IA \approx 2,0144; IB \approx 2,0655; IC \approx 2,8301$

HƯỚNG DẪN CHẤM

– Mỗi kết quả đúng : 1 điểm (Nhu vậy điểm tối đa là 15).

– Với kết quả là số nguyên: nếu sai 1 chữ số hoặc dấu $\pm$ thì không cho điểm.

– Với kết quả là số thập phân:

+ Nếu sai kém ± 1 ở chữ số thập phân cuối thì không trừ điểm.

+ Nếu sai kém từ ± 2 trở lên ở chữ số thập phân cuối thì trừ 0,5 điểm.

+ Nếu đúng nhưng không làm tròn số thì trừ 0,5 điểm.

+ Nếu sai 1 chữ số ở các hàng khác thì không cho điểm.

ĐỀ 11

ĐỀ HSG TPHCM NĂM HỌC 2019-2020 - Ngày thi: 05/01/2020

Đề bài	Trả lời
Bài 1. Tìm số dư khi chia số 23^{2020} cho 2019.	1219
Bài 2. Tìm bội số nhỏ nhất của 2019 có tận cùng là bảy chữ số 1.	1761111111
Bài 3. Tìm hai chữ số tận cùng của số $A = 3^{2019} + 3^{2020} + 3^{2021}$	71

Bài 4. Cho biết $\frac{1}{2.4.6} + \frac{1}{4.6.8} + \dots + \frac{1}{2018.2020.2022} = \frac{A}{B}$ (là phân số tối giản). Tính A+B ?	ĐS : $\frac{A}{B} = \frac{255277}{8168880}$ A+B = 8424157
Bài 5. Cho đa thức bậc năm $P(x)$ có hệ số bậc cao nhất (bậc 5) là 2 thỏa $P(k) =$ với $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Tính $P(5)$.	1482
Bài 6. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất mà n^3 bắt đầu bởi số 10 và kết thúc bằng số 43 ($n^3 = 10****43$).	1007
Bài 7. Trong hệ trục Oxy, tìm tọa độ các giao điểm của đường thẳng $(d): y = \frac{2,9 - \sqrt{2}}{3,1 - \sqrt{3}}x + \frac{1,2 - \sqrt{3}}{0,6 + \sqrt{2}}$ và Parabol $(P): y = \sqrt{1,2}.x^2$ (ghi chính xác đến 2 chữ số thập phân).	A(0.43; 0.20) B(0.56; 0.35)
Bài 8. Tìm tất cả cặp số nguyên x, y , thỏa $5x^{2a} + 5y^2 + 2x + 6y = 3794$	21; 17; -13; -25 Đáp án Sờ còn thiếu: 27; -5
Bài 9. Cho tam giác ABC có 3 đường trung tuyến $AM = 4,3$; $BN = 2,7$; $CP = 3,9$ và G là trọng tâm. Tính (chính xác đến 2 chữ số thập phân): a) Độ dài các cạnh AB, AC của tam giác ABC . b) Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác BGC . c) Bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác MNP .	$AB \approx 4,02$ $AC \approx 5,17$ $R \approx 1,75$ $r \approx 0,55$
Bài 10. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi: $x_1 = 1$; $x_2 = 1$ và $x_n = 2x_{n-1} - n.x_{n-2} + n^2$ ($n \geq 3$). Tính (ghi kết quả chính xác): x_{20} , x_{21} , $x_{22}, \dots$ (thí sinh có thể tính các số hạng kế tiếp nếu còn thời gian)	$x_{20} = 2140149880$ $x_{21} = 40784341519$ $x_{22} = 128651979914$ Đáp án đúng: $x_{21} = -40784341519$ $x_{22} = -128651979914$

- * Bài 1 – Bài 9: Mỗi kết quả đúng : 1 điểm (Tổng cộng 14đ).
- * Bài 10: Mỗi số đúng 0,1đ
- * Với kết quả là số nguyên: nếu sai 1 chữ số hoặc dấu +/- thì không cho điểm.
- * Với kết quả là số thập phân:
 - Nếu sai kém ± 1 ở chữ số thập phân cuối thì **không trừ điểm**.
 - Nếu sai kém từ ± 2 trở lên ở chữ số thập phân cuối thì **trừ 0,5 điểm**.
 - Nếu đúng nhưng không làm tròn số thì **trừ 0,5 điểm**.
 - Nếu sai 1 chữ số ở các hàng khác thì **không cho điểm**.
 -

ĐỀ 12
ĐỀ MTCT Q8 - NĂM HỌC: 2020 - 2021

ĐỀ BÀI	KẾT QUẢ
Bài 1: Tìm ba chữ số tận cùng của 2019 ²⁰²¹	
Bài 2: Tìm a, b biết $\overline{235a7b4}$. Biết số đó chia 356 dư 34	
Bài 3: Tìm số tự nhiên x lớn nhất có 9 chữ số biết x chia 1358 dư 45; chia 3518 dư 117; chia 5381 dư 4375	
Bài 4: Cho $A = 555^{222} + 222^{555} + 2020$. Tìm số dư trong phép chia A cho 7	
Bài 5: Cho $P(x)$ là đa thức bậc bốn thỏa mãn điều kiện sau: $P(x)$ chia $x^2 + 1$ dư $2x - 1$; $P(x)$ chia $x^2 + 2$ dư $3x - 1$ và $P(1) = 2015$. Tính $P(3)$	
Bài 6: Tìm số tự nhiên x nhỏ nhất mà x chia hết cho 2013 và có 4 chữ số cuối bằng nhau	
Bài 7: Cho dãy số (x_n) được xác định bởi: $x_1 = 1$; $x_2 = 1$ và $x_n = x_{n-1} - nx_{n-2} + 2n^2$ ($n \geq 3, n \in \mathbb{N}$). Tính (ghi kết quả chính xác): $x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_{21}, \dots$ (có thể ghi các số hạng kế tiếp nếu còn thời gian)	
Bài 8: Cho tam giác ABC có $BC = 5,4$; đường cao $AH = 2,7$ và trung tuyến $BM = 3,8$. a) Tính số đo góc C (độ, phút, giây). b) Tính chiều cao BK; cạnh AC (Chính xác đến chữ số thập phân thứ 2). c) Tính số đo góc A (độ, phút, giây). d) Gọi O là giao điểm của AH và BM. Tính khoảng cách từ O đến AB (Chính xác đến chữ số thập phân thứ 2).	

HƯỚNG DẪN GIẢI CÁC ĐỀ

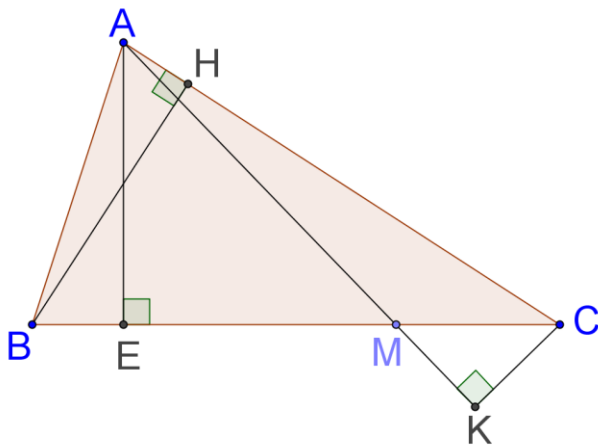
HƯỚNG DẪN ĐỀ 1

Bài 2:

$$\begin{cases} x-13:19 \\ x-19:31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 31x-403:589 \\ 19x-361:589 \end{cases} \Rightarrow 12x-42:589 \Rightarrow 36x-126:589 \Rightarrow 5x+277:589 \\ \Rightarrow 5x+277:589 \Rightarrow 30x+1662:589 \Rightarrow x-2065:589 \Rightarrow x=589.k+2065 \\ x \leq 99.999.999.999 \Rightarrow k \leq (99.999.999.999-2065):589 \Rightarrow k \leq 169.779.283 \\ \text{Chọn } k=169.779.283 \Rightarrow x=99.999.999.752$$

Bài 9:

- a) BH=7,485755904
- b) $S_{ABC} = 48,88781708$
- c) Khoảng cách từ C đến AM là: 2,495251968
- d) $r_{ABM} = 2,6476404$



b) $\triangle MEA \sim \triangle MKC \Rightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{CK}{AE} = \frac{1}{3}$

Tính AE rồi suy ra CK

HƯỚNG DẪN ĐỀ 2

Câu 1: Tìm chữ số * đề $\overline{11111111*33333333} : 7$

Gọi $a = *$

Có: $\overline{11111111a33333333} = \overline{11111111}.10^9 + a.10^8 + 3.\overline{11111111}$

$\overline{11111111}.(10^9+3) + a.10^8 = (B7+4)(B7+2) + a.(B7+2) = B7+1+2a$

Để số trên chia hết cho 7 thì: $(2a+1):7$ mà vì $0 \leq a \leq 9 \Rightarrow a=3$

Câu 2: Tìm các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn phương trình:

$$y^3 = x^3 + 2x^2y + 11xy + 11x^2$$

Câu 3:

Giả sử $f(x) = a_n x^n + \dots + a_8 x^8 + a_7 x^7 + a_6 x^6 + a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Có $f(8):8 \Rightarrow a_0:8$ mà $a_0 < 8, a_0 \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow a_0 = 0$

Vậy: $f(8) = a_n 8^n + \dots + a_8 8^8 + a_7 8^7 + a_6 8^6 + a_5 8^5 + a_4 8^4 + a_3 8^3 + a_2 8^2 + a_1 8$

$$\Rightarrow \frac{f(8)}{8} = a_n 8^{n-1} + \dots + a_8 8^7 + a_7 8^6 + a_6 8^5 + a_5 8^4 + a_4 8^3 + a_3 8^2 + a_2 8^1 + a_1 = 2519002 \text{ chia 8 dư 2}$$

Trong máy tính ta bấm: $21052016 : 8 =$

Bấm tiếp: Alpha $\div R \ 8 \rightarrow 314875, R = 2 \Rightarrow a_1 = 2$

$$\Rightarrow \frac{f(8) - 2}{8} = a_n 8^{n-2} + \dots + a_8 8^6 + a_7 8^5 + a_6 8^4 + a_5 8^3 + a_4 8^2 + a_3 8 + a_2 = 314875$$

Bấm tiếp: Alpha $\div R \ 8 \rightarrow 39359, R = 3 \Rightarrow a_2 = 3$

Tiếp tục bấm dấu = ta lại có: $4919, R = 7 \Rightarrow a_3 = 7$

Tiếp tục bấm dấu = ta lại có: $614, R = 7 \Rightarrow a_4 = 7$

Tiếp tục bấm dấu = ta lại có: $76, R = 6 \Rightarrow a_5 = 6$

Tiếp tục bấm dấu = ta lại có: $9, R = 4 \Rightarrow a_6 = 4$

Nghĩa là lúc này ta có VP = $a_n 8^{n-2} + \dots + a_8 8 + a_7 = 9$

Tiếp tục bấm dấu = ta lại có: $1, R = 1 \Rightarrow a_7 = 1$

Nghĩa là lúc này VP = $a_n 8^{n-2} + \dots + a_8 8 = 8$

Do hệ số < 8 và nguyên dương nên các hệ số của lũy thừa cao hơn 8 sẽ là 0 vậy đây là đa thức bậc 8 và $a_8 = 1$

Vậy suy ra đa thức $f(x)$ cần tìm là: $f(x) = x^8 + x^7 + 4x^6 + 6x^5 + 7x^4 + 7x^3 + 3x^2 + 2x$

Vậy suy ra tổng các hệ số bằng 31

Một ví dụ về cách làm khác cho bài số 3:

Cho $P(x)$ là đa thức với hệ số nguyên không âm và không lớn hơn 8. Giả sử $P(9) = 32087$. Hãy tìm đa thức $P(x)$?

Hướng dẫn:

Giả sử đa thức cần tìm có dạng: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

Theo giả thiết thì: $P(9) = a_n 9^n + a_{n-1} 9^{n-1} + \dots + a_1 9 + a_0 = 32078$

Vì $a_i, i = \overline{1, n}$ là số nguyên không âm nhỏ hơn 9 nên:

$$P(9) = a_n 9^n + a_{n-1} 9^{n-1} + \dots + a_1 9 + a_0 = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}_{(9)} = 32078$$

Trong đó: $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}_{(9)}$ là biểu diễn của 32078 trong hệ đếm cơ số 9 và $32078 = 48002_{(9)}$ Nên

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}_{(9)} = 48002 \Rightarrow n = 4, a_4 = 4, a_3 = 8, a_2 = 0, a_1 = 0, a_0 = 2$$

Suy ra đa thức cần tìm là: $P(x) = 4x^4 + 8x^3 + 2$. Thử lại thấy đúng.

Cách đổi từ hệ thập phân sang hệ cơ số 9:

Số bị chia	Số chia	Thương	Dư
32078 chia cho	9	3564	2
3564	9	396	0
396	9	44	0
44	9	4	8
4	9	0	4

Vậy: $32078=48002_{(9)}$

Bài 3:

a) $IA = 1,183792817$; $IB = 2,941169472$; $IC = 3,840750634$; $R_{IBM} = 1,524637189$

b) $AJ = 1,089924836$

HƯỚNG DẪN ĐỀ 4

1. Tính tổng các ước nguyên tố của 1987526177

$$1987526177 = 7.13.43.47.101.107$$

Vậy tổng các ước nguyên tố là: $7 + 13 + 43 + 47 + 101 + 107 = 318$

Nếu tính tổng các ước tự nhiên thì Áp dụng công thức tính tổng các ước:

Nếu $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \dots p_k^{\alpha_k}$ thì tổng các ước tự nhiên của m được tính bằng công

$$\begin{aligned} \text{thức: } \sigma(m) &= \prod_{i=1}^k \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1} = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \dots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1} \\ &= \frac{7^2 - 1}{7 - 1} \cdot \frac{13^2 - 1}{13 - 1} \cdot \frac{43^2 - 1}{43 - 1} \cdot \frac{47^2 - 1}{47 - 1} \cdot \frac{101^2 - 1}{101 - 1} \cdot \frac{107^2 - 1}{107 - 1} = 8.14.44.48.102.108 = 2605768704 \end{aligned}$$

2. Tìm chữ số * để số $\overline{22222222 * 33333333}$ chia hết cho 7

$$\overline{22222222 * 33333333} = 22222222 \cdot 10^9 + * \cdot 10^8 + 33333333$$

$$= (B7 + 1)(B7 + 6) + *(B7 + 2) + B7 + 5$$

$$= B7 + 6 + B7 + 2 + B7 + 5 = B7 + *.2 + 4 \Rightarrow * = 5$$

3. Tìm dư trong phép chia 21^{2016} cho 2016

Dùng đồng dư theo mod 2016 ta có:

$$21^5 \equiv 1701; 21^{10} \equiv 441; 21^{20} \equiv 945; 21^{50} \equiv 441; 21^{100} \equiv 945; \dots; 21^{2016} \equiv 1953$$

4) Tìm ước nguyên tố lớn nhất của: $A = 1241^2 + 187^3 + 85^4$

$$= 17^2 \cdot 73^2 + 11^3 \cdot 17^3 + 5^4 \cdot 17^4 = 17^2 \cdot 208581 = 17^2 \cdot 3 \cdot 251 \cdot 277$$

Theo sự phân tích trên, 277 là ước nguyên tố lớn nhất của A

5. Tìm số nhỏ nhất có tận cùng là 88888 chia hết cho 337

$$\overline{a88888} = a \cdot 10^5 + 88888 = a(B337 + 248) + B337 + 257 = B337 + a \cdot 248 + 257$$

$$= B337 + a \cdot 248 - 80$$

Ta đi đến giải PT nghiệm nguyên: $a \cdot 248 - 337 \cdot b = 80$

Hoặc xây dựng dãy lặp sau:

$A = A + 1$: $(248A - 80) : 337$ và bấm liên tục các dấu = đến khi $A = A + 1 = 196$ ta được kết quả trên màn hình là: 144

Từ đó suy ra $a = 196$ vậy số cần tìm là: 19688888

6) Tìm số chính phương có 3 chữ số biết rằng khi chia số đó cho tổng các chữ số của nó được thương là 64 dư 9

Số cần tìm là $\overline{abc}$ a vậy $10^2 = 100 < \overline{abc} < 31^2 = 961$

$$\text{Gọi số cần tìm là } \overline{abc} = 100a + 10b + c - 9 = 64(a + b + c) \Leftrightarrow 4a - 6b = 7c + 1$$

Ta thấy $7c + 1$ phải chia hết cho 2. Mà số chính phương chỉ có thể tận cùng là: 1, 4, 5, 6, 9 nên c chỉ có thể là 1, 5, 9

– Nếu c = 1 thì căn bậc hai của số cần tìm phải là các số có tận cùng là 1 hoặc 9, gồm: 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91 và khi đó $4a - 6b = 8$

Trong trường hợp này, ta thấy $29^2 = 841$ có: $8 \cdot 4 - 6 \cdot 4 = 8$

Vậy số cần tìm là 841

7) Tìm m để phương trình sau vô nghiệm:

$$(1,6 - 0,41m)(0,4x - 0,13) = (1,2x - 4,52m)(3,4 - 1,23m) - 2,3(4,5m + 3,7x)$$

(Tính chính xác đến 2 chữ số thập phân)

Nhận xét: Đây là 1 phương trình bậc nhất, ta hoàn toàn có thể đưa được về dạng: $ax + b = 0$

Một phương trình bậc nhất chỉ vô nghiệm khi $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$. Tuy nhiên ở đây đề bài yêu cầu tìm m

để phương trình vô nghiệm nên khi tìm được m để $a = 0$ thì nhất định b sẽ khác 0. Vì vậy ta chỉ cần quan tâm và tính hệ số của x mà thôi.

Ta phải có:

$$\begin{aligned} -0,41.0,4m + 1,6.0,4 &= 1,2.3,4 - 1,2.1,23m - 2,3.3,7 \\ \Leftrightarrow -0,41.0,4m + 1,6.0,4 - 1,2.3,4 + 1,2.1,23m + 2,3.3,7 &= 0 \\ \Leftrightarrow 1,312mx + 6,03 &= 0 \Leftrightarrow 1,312m + 5,07 = 0 \Rightarrow m = \frac{-6,03}{1,312} \approx -3,86 \end{aligned}$$

8) Cho $g(x) = -3x^3 + 4x^2 + 2x - 7$

$f(1) = 2g(1); f(2) = 3g(2); f(3) = 4g(3); f(4) = 5g(4)$. Tính $f(15)$

Xây dựng dãy lặp để tính ta có kết quả

$$A = A + 1 : (A + 1)(-3A^3 + 4A^2 - 2A - 7)$$

Bấm CALC và nhập $A = 0$. Bấm liên tiếp các dấu bằng ta có:

$$f(1) = -8; f(2) = -33; f(3) = -184; f(4) = -635$$

Áp dụng công thức nội suy Newton và $f(x)$ là đa thức bậc 3 nên $f(x)$ có dạng:

$$F(x) = a_1 + a_2(x - 1) + a_3(x - 1)(x - 2) + a_4(x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$$\text{Với } f(1) = -8 \Rightarrow a_1 = -8$$

$$f(2) = -33 \Rightarrow a_2 = (-33 + 8) : (2 - 1) = -25$$

$$f(3) = -184 \Rightarrow a_3 = [-184 + 8 + 25(3 - 1)] : (3 - 1)(3 - 2) = -63$$

$$f(4) = -635 \Rightarrow a_4 = [-635 + 8 + 25(4 - 1) + 63(4 - 1)(4 - 2)] : (4 - 1)(4 - 2)(4 - 3) = -29$$

$$\text{Vậy } f(x) = -8 - 25(x - 1) - 63(x - 1)(x - 2) - 29(x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$$\Rightarrow f(15) = -75160$$

9) Cho hình vuông ABCD cạnh bằng 7,5. Trên cạnh DC lấy điểm F sao cho $DF = 3,6$.

Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $CE = 2,7$. Gọi I là giao điểm AC và DE

a) Tính IF

b) Tính S_{ADFI}

c) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEI

d) Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác AEI

Tính gần đúng chính xác đến 2 chữ số thập phân

$$\text{a) } AD \parallel EC \Rightarrow \frac{EI}{ID} = \frac{CI}{IA} = \frac{EC}{AD} = \frac{2,7}{7,5} = \frac{ED - ID}{ID} = \frac{ED}{ID} - 1 = \frac{AC - IA}{IA} = \frac{AC}{IA} - 1$$

– Mà ED và AC tính được suy ra tính được IA, ID từ đó suy ra IC và IE

– Góc IDF tính được, cạnh ID và DF đã biết $\Rightarrow$ tính được IF dùng định lý Cosin

b) Vẽ 2 đường vuông góc IG và IH

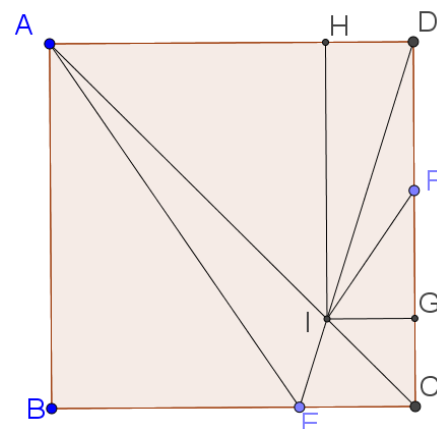
– Tam giác vuông IDG tính được góc IDG và ID nên $\Rightarrow$ tính được IG, DG $\Rightarrow$ tính được S_{IDF}

– $DG = IF \Rightarrow$ tính được $S_{AID} \Rightarrow$ tính được S_{ADFI}

c) Tam giác AEI đã biết độ dài ba cạnh nên áp dụng 2 công thức sau tính được bán kính đường tròn nội và ngoại tiếp:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \quad S = \frac{abc}{4R}; \quad S = p.r$$

$$\text{Đáp số: } IF \approx 2,76; \quad S \approx 24,25; \quad R \approx 4,92; \quad r \approx 0,79$$



HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ 5

Bài 6: Tìm dư khi chia số $(2+\sqrt{3})^{24} + (2-\sqrt{3})^{24}$ cho 2017

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = 2 + \sqrt{3} \\ b = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ a \cdot b = 1 \end{cases}$$

$$a^{24} + b^{24} = (a^{12} + b^{12})^2 - 2a^{12}b^{12}$$

Bài 7: Cho $P(x)$ là một đa thức bậc 4 thỏa các điều kiện: $P(x)$ chia cho $(x^2 + 1)$ dư $2x - 1$; $P(x)$ chia cho $(x^2 + 2)$ dư $3x - 1$ và $P(1) = 2015$. Tính $P(2)$

Hướng dẫn:

Ta có: $P(x) = (x^2 + 1)(ax^2 + bx + c) + 2x - 1 = ax^4 + bx^3 + (a+c)x^2 + (b+2)x + c - 1$

$P(x) = (x^2 + 2)(mx^2 + nx + t) + 3x - 1 = mx^4 + nx^3 + (2m+t)x^2 + (2n+3)x + 2t - 1$

Lại có $P(1) = 2015$ nên ta suy ra: $P(1) = (1^2 + 1)(a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c) + 2 \cdot 1 - 1 = 2015$

Suy ra: $a + b + c = 1007$

Tương tự suy ra: $m + n + t = 671$

Đồng nhất hệ số của $P(x)$ và 2 PT trên ta có hệ:

$$\begin{cases} a = m \\ b = n \\ a + c = 2m + t \\ b + 2 = 2n + 3 \\ c - 1 = 2t - 1 \\ a + b + c = 1007 \\ m + n + t = 671 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = b = -1 \\ a = m \\ a + c = 2m + t \\ c = 2t \Rightarrow t = \frac{c}{2} \\ a + c = 1008 \\ m + t = 672 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = b = -1 \\ a = m \\ t = \frac{c}{2} \\ a + c = 2m + t \\ a + c = 1008 \\ a + \frac{c}{2} = 672 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = b = -1 \\ a = m \\ t = \frac{c}{2} \\ a + c = 2m + t \\ a + c = 1008 \\ 2a + c = 1344 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = b = -1 \\ a = m \\ t = \frac{c}{2} \\ a + c = 2m + t \\ a + c = 336 \\ c = 672 \end{cases} (*)$$

Các giá trị a, c, m, t thỏa (*) nên ta có kết quả cuối cùng

$n = b = -1; a = m = t = 336; c = 672$

Vậy $P(x) = ax^4 + bx^3 + (a+c)x^2 + (b+2)x + c - 1 = 336x^4 - x^3 + 1008x^2 + x + 671$

Từ đó tính được $P(2) = 10073$

Bài 8: Tìm GTNN (chính xác đến 4 chữ số thập phân) của biểu thức:

$$A = \sqrt{2,3x^2 - (\sqrt{5} + 04)x + (4 + 3\sqrt{2})^2}$$

Bài 9: Cho tam giác ABC có $AB=2,9$; $BC=4,1$; $CA=3,6$. Trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm D, E, F sao cho $AD=1,4$; $BE=1,8$ và $CF=1,2$. AE cắt DF tại M. Tính gần đúng (chính xác đến 2 chữ số thập phân sau dấu phẩy)

a) Diện tích tam giác DEF

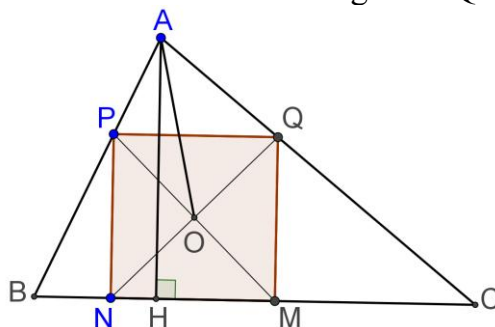
b) Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF

c) Độ dài đoạn MD

Bài 10: Cho tam giác ABC có $BC=15$; $CA=17$; $AB=14$. Hình vuông MNPQ có M và N thuộc cạnh BC; P và Q lần lượt thuộc cạnh AB và AC

a) Tính diện tích hình vuông MNPQ

b) Khoảng cách từ A đến tâm O của hình vuông MNPQ



Phân tích:

–Vì tính diện tích hình vuông trên cơ sở tam giác ABC tính được diện tích nên ta nghĩ đến vẽ thêm đường cao AH. Khi đó ta có $PN \parallel AH \parallel QM$ ta áp dụng được định lý Talet:

–Sử dụng công thức Herong tính được S_{ABC} và có $S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC$ nên AH tính được

–Ta có: $\frac{BP}{BA} = \frac{BN}{BH} = \frac{PN}{AH}$ và $\frac{CQ}{CA} = \frac{CM}{CH} = \frac{MQ}{AH}$. Hơn nữa $\frac{PN}{AH} = \frac{MQ}{AH}$ nên

$$\frac{BP}{BA} = \frac{BN}{BH} = \frac{PN}{AH} = \frac{CQ}{CA} = \frac{CM}{CH} = \frac{BN+PN+CM}{BH+AH+CH} = \frac{BN+NM+CM}{BH+AH+CH} = \frac{BC}{BC+AH}$$

Lại có: $\frac{BC}{BC+AH}$ tính được nên từ đây ta tính được PN và suy ra diện tích hình vuông

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ 7 ĐỀ HSG SỞ GD-ĐT TPHCM NĂM 2017 – 2018

Bài 2: Cho $M = 7 + 77 + 777 + 7777 + \dots + 77\dots777$ (có 2018 số hạng) và
 $N = 3 - 33 + 333 - 3333 + \dots + 33\dots333$ (có 2017 số hạng)
 Tìm 3 chữ số tận cùng của tích M.N

Hướng dẫn:

$M = 7 + 77 + 777 + 7777 + \dots + 77\dots777$ (có 2018 số hạng)

Ta thấy: dãy số: $777 + 7777 + \dots + 77\dots777$ gồm có 2016 số hạng mà mỗi số hạng đồng dư với 777 (mod 1000) vậy $M \equiv 7 + 77 + 777 \cdot 2016 \equiv 516 \pmod{1000}$

Dãy số $333 - 3333 + \dots + 33\dots333$ gồm có 2015 số hạng và mỗi số hạng đồng dư với 333 (mod 1000)

Vậy: $(333 - 3333 + \dots - 33\dots333) + 33\dots333 \equiv 0 + 333$
2016 số hạng 2017 số hạng

Vậy $N \equiv 3 - 33 + 333 \equiv 303$

$M \cdot N \equiv 303 \cdot 516 \equiv 348$

Bài 5: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $4x^2(2x+3y^2) + y^4(6x+y+y^2) = 3193330$

Bài 6: Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $n+1930$ và $n+2539$ đều là số chính phương

Hướng dẫn:

Đặt: $a^2 = n + 1930$ và $b^2 = n + 2539$. Suy ra:

$b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) = 609 = 3 \cdot 7 \cdot 29 = 21 \cdot 29 = 7 \cdot 87 = 3 \cdot 203 = 1 \cdot 609 = \dots$

-Với $\begin{cases} b-a=21 \\ b+a=29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=25 \end{cases} \Rightarrow n=-1914$

-Với $\begin{cases} b-a=7 \\ b+a=87 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=40 \\ b=47 \end{cases} \Rightarrow n=-330$

-Với $\begin{cases} b-a=3 \\ b+a=203 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=103 \\ b=100 \end{cases} \Rightarrow n=8070$

-Với $\begin{cases} b-a=1 \\ b+a=609 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=305 \\ b=304 \end{cases} \Rightarrow n=90486$

Với: $(b-a)(b+a) = -21 \cdot (-29) = -7 \cdot (-87) = -3 \cdot (-203) = -1 \cdot (-609) =$ ta cũng tìm được các giá trị như trên

HƯỚNG DẪN ĐỀ 8

Bài 1: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất mà lập phương của nó có tận cùng là 4 chữ số 1

ĐS: 8471

Hướng dẫn:

–Số tự nhiên có 2 chữ số có tận cùng là 1 và lập phương của nó có dạng: $f(x) = (10x + 1)^3$

$$f(x) = (1 + 10x)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 10x + 3 \cdot 1 \cdot (10x)^2 + (10x)^3$$

Ta cần tìm x để $3 \cdot 1^2 \cdot x$ có tận cùng là 1 $\Rightarrow x = 7$ (Xem chi tiết giải thích bên dưới)

Vậy, ta được số 71 và có $71^3 = 357911$

–Số có 3 chữ số mà hàng chục và hàng đơn vị là 71 có lập phương là: $f(x) = (100x + 71)^3$

$$f(x) = (71 + 100x)^3 = 71^3 + 3 \cdot 71^2 \cdot 100x + 3 \cdot 71 \cdot (100x)^2 + (100x)^3$$

Vì số $71^3 = 357911$ có chữ số hàng trăm là 9 nên để số $(71 + 100x)^3$ có tận cùng là ba chữ số 1 thì số $3 \cdot 71^2 \cdot 100x$ phải có chữ số hàng trăm là 2 (để $9+2=11$) nghĩa là $3 \cdot 71^2 \cdot x$ phải có tận cùng là 2 hay $3 \cdot 1^2 \cdot x$ phải có tận cùng là 2. Từ đây ta nhẩm được $x = 4$

Vậy ta được số 471 mà $471^3 = 104487111$ có 3 chữ số tận cùng là 1

–Tiếp tục xét số có 4 chữ số mà 3 chữ số tận cùng là 471 có lập phương là:

$$f(x) = (1000x + 471)^3 = (471 + 1000x)^3 = 471^3 + 3 \cdot 471^2 \cdot 1000x + \dots$$

Phân tích:

–Số hạng: $471^3 = 104487111$, có chữ số hàng nghìn là 7, để số $(1000x + 471)^3$ có chữ số hàng nghìn là 1 thì cần cộng thêm 4 vào chữ số hàng nghìn của số 104487111 ($7+4=11$). và 4 phải là chữ số hàng nghìn của số hạng $3 \cdot 471^2 \cdot 1000x$ vì số này là tích với 1000. Chữ số hàng nghìn của số $3 \cdot 471^2 \cdot 1000x$ chính là chữ số hàng đơn vị của số $3 \cdot 471^2 \cdot x$.

–Đưa ta đến bài toán đơn giản sau : Tìm $x = \overline{1;9}$ để chữ số tận cùng của số $3 \cdot 471^2 \cdot x$ là 4

Hay đơn giản hơn: Tìm $x = \overline{1;9}$ để $3 \cdot 1^2 \cdot x$ là một số có tận cùng là 4 (vì ta chỉ quan tâm đến chữ số tận cùng nên ta chỉ lấy các chữ số tận cùng để thực hiện phép toán).

Đến đây ta nhẩm cũng suy ra được $x = 8$

–Số cần tìm là 8471 có lập phương là: $8471^3 = 607860671111$

Giải thích rõ hơn về cách thực hiện ở trên:

Ta có các hằng đẳng thức:

$$(1+10x)^3 = 1^3 + 3 \times 10x + 3(10x)^2 + (10x)^3$$

$$(71+100x)^3 = 71^3 + 3 \times 71^2 \times 100x + 3 \times (100x)^2 \times 71 + (100x)^3$$

$$(471+1000x)^3 = 471^3 + 3 \times 471^2 \times 1000x + 3 \times 471 \times (1000x)^2 + (1000x)^3$$

Trong đó: $x = \overline{1;9}$

Phân tích đẳng thức cuối cùng làm ví dụ:

–Số hạng: $471^3 = 104487111$ (Số này có chữ số hàng nghìn là 7)

–Số hạng: $3 \cdot 471^2 \cdot 1000 \cdot x$ sẽ có dạng: $***a000$ trong đó a là chữ số tận cùng của $3 \cdot 471^2 \cdot x$ mà số này có cùng chữ số tận cùng với số $3 \cdot 1^2 \cdot x$

–Số hạng: $3 \cdot 471 \cdot (1000 \cdot x)^2 = 3 \cdot 471 \cdot x^2 \cdot 1000000$ sẽ có dạng: $***b.000.000$ trong đó b là chữ số tận cùng của $3 \cdot 471 \cdot x^2$

–Số hạng: $(1000x)^3$ là số có dạng: $x.000.000.000$

Như vậy số $(471 + 1000x)^3$ tính theo cách này, ta cộng 4 số hạng trên và đặt tính theo cột dọc thì kết quả như sau :

$$\begin{array}{r}
 \overline{x.000.000.000} \\
 + \overline{*.**b.000.000} \\
 \hline
 \overline{*.***.**a.000} \\
 \hline
 104.487.111 \\
 \hline
 *.***.**1.111
 \end{array}$$

Như vậy, để kết quả có chữ số hàng nghìn là 1 thì ta cần phải có : $a + 7$ có tận cùng là 1 tức $a=4$

a chính là chữ số hàng nghìn của số $3.471^2 \cdot 1000 \cdot x$ hay là chữ số hàng đơn vị của số $3.471^2 \cdot x$ mà số này có cùng chữ số tận cùng với số $3.1^2 \cdot x$. Từ đây ta dễ dàng nhẩm được x

Mở rộng bài toán: Nếu muốn tìm số mà lập phương là 5 chữ số 1 hay nhiều hơn, ta tiếp tục như sau:

$$\text{Ta có: } (8471 + 10000x)^3 = 8471^3 + 3 \cdot 8471^2 \cdot 10000x + \dots$$

Nhận xét:

-Số hạng: $8471^3 = 5428671111$ có chữ số hàng chục nghìn là 7

-Số hạng: $3 \times 8471^2 \times 10000x$ là tích với số 10000 nên chữ số hàng **chục nghìn** là chữ số tận cùng của số $3 \times 8471^2 x$.

-Để chữ số hàng chục nghìn (tức chữ số thứ 5 từ bên phải qua) của số cần tìm là 1 thì chữ số hàng đơn vị của số $3 \times 8471^2 x$ phải là 4 để cộng với số 7 hàng chục nghìn của số 8471^3 cho ta số 1. Từ đây ta đi tìm $x = \overline{1;9}$ để $3 \times 8471^2 x$ có tận cùng là 4.

Vì chỉ quan tâm chữ số tận cùng nên số $3 \times 8471^2 x$ có tận cùng bằng với chữ số tận cùng của số: $3.1^2 \cdot x \Rightarrow x = 8$

Vậy số tự nhiên nhỏ nhất mà lập phương của nó có tận cùng là 5 chữ số 1 là số: **88471**

$$88471^3 = 69247294251111$$

Tương tự: Số tự nhiên nhỏ nhất mà lập phương của nó có tận cùng là 6 chữ số 1 là số 288471.

$$288471^3 = 2400526364711111$$

Với cách làm trên thì việc tìm các số tiếp theo khá đơn giản, không cần đến MTCT

Bài 2: Tìm số tự nhiên n biết 4537694462041^n có 5320000 ước số **ĐS: 9**

Số các ước của m : Nếu $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \dots p_k^{\alpha_k}$

Thì số các ước (tự nhiên) của m là $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$

Hướng dẫn :

Vì số 453769446 tràn màn hình nên ta tách ra làm 2 và dùng chức năng phân tích ra thừa số nguyên tố để tìm ra các thừa số nguyên tố chung ở cả 2 số như sau:

Nguyên tắc tìm:

$$4537694462041 = 453769446 \cdot 10^4 + 2041 = 2.3.13.271.21467 \cdot 10^4 + 13.157$$

Ta có số 13 chung

$$= 13(2.3.271.21467 \cdot 10^4 + 157) = 13.349053420157$$

$$= 13(34905 \cdot 10^7 + 40157) = 13(3.5.13.179 \cdot 10^7 + 13.263089)$$

Tương tự số 13 chung

$$= 13^2(2685 \cdot 10^7 + 263089) = 13^2.26850263089 = 13^2.(268502 \cdot 10^5 + 63089)$$

$$= 13^2.(2.13.23.449 \cdot 10^5 + 13.23.211) = 13^3.23.(898 \cdot 10^5 + 211) = 13^3.23.89800211$$

$$= 13^3.23.23.29.31.43.101 = 13^3.23^2.29.31.43.101$$

$$\text{Suy ra: } 4537694462041^n = 13^{3n} \cdot 23^{2n} \cdot 29^n \cdot 31^n \cdot 43^n \cdot 101^n$$

Ta có: $(3n+1)(2n+1)(n+1)^4=5320000$

Dùng dãy lập để tìm. Để ý rằng 5320000 có 4 số 0 tận cùng nên chọn $n = 9$ thỏa đề bài

Bài 3: Tìm dư trong phép chia $2018^{2019} : 719$

ĐS: 520

Bài 4: Tìm ước nguyên tố lớn nhất của số $A=731^2 + 187^3 + 14161^2$

ĐS: 577

Bài 5: Tìm chữ số thập phân thứ 2019 sau dấu phẩy trong phép chia 17 cho 43

ĐS: 5

Bài 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1,9x+2,7}{\sqrt{3x-4,3}}$ (KQ ghi chính xác 2 chữ số thập

phân)

ĐS: 3,71

Bài 7: Tìm dư khi chia số $(2+\sqrt{3})^{27} + (2-\sqrt{3})^{27}$ cho 2018

ĐS: 1584

Cách 1:

$$(2+\sqrt{3})^{27} + (2-\sqrt{3})^{27} = \left[\left((2+\sqrt{3})^3 \right)^3 \right] + \left[\left((2-\sqrt{3})^3 \right)^3 \right]$$

$$\text{Có: } (2+\sqrt{3})^3 = 8+12\sqrt{3}+18+\sqrt{3}^3 = 26+15\sqrt{3}$$

$$\left[(2+\sqrt{3})^3 \right]^3 = (26+15\sqrt{3})^3 = 70226 + 40545\sqrt{3} \equiv 1614 + 185\sqrt{3} \pmod{2018}$$

$$\left[\left((2+\sqrt{3})^3 \right)^3 \right]^3 \equiv (1614 + 185\sqrt{3})^3 \pmod{2018}$$

Như vậy tương tự ta cũng có:

$$\left[\left((2-\sqrt{3})^3 \right)^3 \right]^3 \equiv (1614 - 185\sqrt{3})^3 \pmod{2018}$$

Ta để ý đây đều là hằng đẳng thức bậc 3 nên các hạng tử thứ 2 và thứ 4 của 2 đa thức này đối nhau nên có tổng bằng 0. Hai hạng tử thứ 1 và thứ 3 giống nhau. Vì đây là lần khai triển cuối cùng nên ta chỉ khai triển 2 hạng tử thứ 1 và thứ 3 sau đó cộng lại và nhân 2 ra kết quả cần tính.

$$(1614 + 185\sqrt{3})^3 \equiv 1614^3 + 3 \cdot 1614 \cdot (185\sqrt{3})^2 \equiv 1614^3 + 3 \cdot 1614 \cdot 185^2 \cdot 3 \pmod{2018}$$

$$\equiv 904 + 1906 \equiv 792 \Rightarrow 2 \cdot 792 \equiv 1584 \pmod{2018}$$

$$\text{Vậy: } (2+\sqrt{3})^{27} + (2-\sqrt{3})^{27} \equiv 1584 \pmod{2018}$$

Cách 2:

$$(2+\sqrt{3})^{27} + (2-\sqrt{3})^{27} = \left((2+\sqrt{3})^9 + (2-\sqrt{3})^9 \right) \left((2+\sqrt{3})^{18} + (2-\sqrt{3})^{18} - (2+\sqrt{3})^9 \cdot (2-\sqrt{3})^9 \right)$$

$$(2+\sqrt{3})^{27} + (2-\sqrt{3})^{27} = \left((2+\sqrt{3})^9 + (2-\sqrt{3})^9 \right) \left((2+\sqrt{3})^{18} + (2-\sqrt{3})^{18} - 1 \right)$$

Sử dụng chức năng tìm thương và dư $\boxed{\div R}$ trên máy tính ta được:

$$(2+\sqrt{3})^9 + (2-\sqrt{3})^9 \equiv 1210 \pmod{2018}$$

Xét tiếp:

$$(2+\sqrt{3})^{18} + (2-\sqrt{3})^{18} = \left((2+\sqrt{3})^6 + (2-\sqrt{3})^6 \right) \left((2+\sqrt{3})^{12} + (2-\sqrt{3})^{12} - (2+\sqrt{3})^6 \cdot (2-\sqrt{3})^6 \right)$$

$$(2+\sqrt{3})^{18} + (2-\sqrt{3})^{18} = \left((2+\sqrt{3})^6 + (2-\sqrt{3})^6 \right) \left((2+\sqrt{3})^{12} + (2-\sqrt{3})^{12} - 1 \right)$$

Sử dụng chức năng tìm thương và dư $\boxed{\div R}$ trên máy tính ta được:

$$(2 + \sqrt{3})^6 + (2 - \sqrt{3})^6 \equiv 684 \pmod{2018}$$

$$(2 + \sqrt{3})^{12} + (2 - \sqrt{3})^{12} \equiv 1696 \pmod{2018}$$

Ta được : $(2 + \sqrt{3})^{18} + (2 - \sqrt{3})^{18} \equiv 684.(1696 - 1) \equiv 1048 \pmod{2018}$

Cuối cùng ta được: $(2 + \sqrt{3})^{27} + (2 - \sqrt{3})^{27} \equiv 1210.(1048 - 1) \equiv 1584 \pmod{2018}$

Cách 3 : $(2 + \sqrt{3})^{27} + (2 - \sqrt{3})^{27}$

Đặt $\begin{cases} a = 2 + \sqrt{3} \\ b = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ a.b = 1 \end{cases}$

$$a^{27} + b^{27} = (a^{14} + b^{14})(a^{13} + b^{13}) - a^{13}b^{13}(a + b)$$

Bài 8: Cho đa thức bậc ba $f(x)$ sao cho $f(x)$ chia cho $x^2 + 1$ dư $2x - 1$, chia cho $x^2 + x$ dư $9x - 2$ Tính $f(2018)$ **ĐS: 24649787260**

Hướng dẫn:

Giả sử: $f(x) = (x^2 + 1)(ax + b) + 2x - 1 = (x^2 + x)(mx + n) + 9x - 2$

$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + ax + b + 2x - 1 = mx^3 + nx^2 + mx^2 + nx + 9x - 2$$

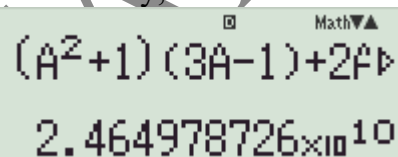
$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + (a+2)x + b - 1 = mx^3 + (m+n)x^2 + (n+9)x - 2$$

Đồng nhất hệ số 2 vế ta được:

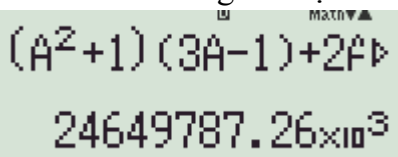
$$\begin{cases} a = m \\ b = m + n \\ a + 2 = n + 9 \\ b - 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = m \\ a + n = -1 \\ a - n = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = m = 3 \\ a = 3 \\ n = -4 \end{cases}$$

$$F(x) = (x^2 + 1)(3x - 1) + 2x - 1$$

Dùng Phím ALPHA nhập đa thức vào máy, bấm CALC rồi nhập 2018 ta được số



Ta bấm tiếp phím [ENG] đến khi màn hình đứng để hiện hết 8 số phần nguyên



Nhìn màn hình ta hiểu số cần tìm là: 24649787 và phía sau còn 3 số nữa. Để hiện đủ 3 số này ta chỉ cần trừ số trên màn hình cho số 24649787000

Như vậy bấm tiếp - 24649787000 ta được: 260

Suy ra số cần tìm là: 24649787260

Nhận xét :

Tính ý hơn một chút ta có : $f(x) = (x^2 + x).Q(x) + 9x - 2$

Từ đây ta tính được : $f(0) = -2$ và $f(-1) = -11$

Bài toán có hướng đi khác đơn giản hơn rất nhiều :

Ta lại có : $f(x) = (x^2 + 1)(ax + b) + 2x - 1$

$$F(0) = b - 1 = -2 \Rightarrow b = -1$$

$$F(-1) = 2(-a + b) - 3 = -11 \Rightarrow a = 3$$

Vậy $f(x) = (x^2 + 1)(3x - 1) + 2x - 1$

Bài 9: Tính tổng sau: $[\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + [\sqrt{4}] + \dots + [\sqrt{2018}]$ ở đây $[\sqrt{x}]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x **ĐS: 59465**

Bài 10: Cho tam giác ABC có AB=3,7; BC=5,2; CA=4,8. Đường cao BH cắt trung tuyến AM tại I. Tính (ghi kết quả chính xác đến 2 chữ số thập phân)

a) Độ dài IA, IB, IC

b) Bán kính đường tròn ngoại tiếp IBM

ĐS: IA ≈ 1,18; IB ≈ 2,94; IC ≈ 3,84, R ≈ 1,52

HƯỚNG DẪN ĐỀ 9

Bài 3: Tính tổng tất cả các số tự nhiên có 3 chữ số $\overline{abc}$ với $\overline{abc} = c^5 + 20(a+b+c)$ **ĐS: 1168**

Hướng dẫn:

$$\overline{abc} = c^5 + 20(a+b+c) \Leftrightarrow c = \sqrt[5]{80a-10b-19c}$$

$$\text{Có: } a \leq 9; b, c \geq 0 \text{ nên } c = \sqrt[5]{80a-10b-19c} \leq \sqrt[5]{80.9-10.0-19.0} \approx 3,7 \approx 3$$

$$\text{Vậy } c \in \{0; 1; 2; 3\}$$

$$\overline{abc} = c^5 + 20(a+b+c) \Leftrightarrow 80a-10b = c^5 + 19c (*)$$

-Với c=0, thay vào (*) ta có: $8a - b = 0$ với $(1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9)$ ta suy ra : a = 1 ; b = 8

Ta được số : 180

-Với c=1, thay vào (*) ta có: $8a - b = 2 \Leftrightarrow a = \frac{b+2}{8}$ với $(1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9)$

ta suy ra : b = 6 ; a = 1. Ta được số : 161

-Với c=2, thay vào (*) ta có: $8a - b = 7 \Leftrightarrow a = \frac{b+7}{8}$ với $(1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9)$

ta suy ra : b = 1 ; a = 1 Và b = 9 ; a = 2. Ta được 2 số : 112 và 292

-Với c=3, thay vào (*) ta có: $8a - b = 30 \Leftrightarrow a = \frac{b+30}{8}$ với $(1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9)$

ta suy ra : b = 2 ; a = 4. Ta được số : 423

Cuối cùng, tổng các số tìm được là : 180+161+112+292+423

Bài 7: Biết phương trình $x^5 + ax^2 + bx - 1 = 0$ có 1 nghiệm là $x = 1 - \sqrt{2}$ và a, b đều là những số nguyên. Tính $a^2 + b^2$ **ĐS: 170**

$$\text{Thay x vào phương trình ta được: } b = \frac{1 - (1 - \sqrt{2})^5}{1 - \sqrt{2}} - (1 - \sqrt{2})a$$

Viết dãy lặp vào máy tính và cho a chạy từ -30 trở đi, để ý kết quả là giá trị nguyên; Ta được kết quả: a = -11; b = -7

HƯỚNG DẪN ĐỀ 10

Bài 4: Cho đa thức bậc ba $f(x)$ sao cho $f(x)$ chia cho $x^2 + 1$ dư $6 - 4x$, chia cho $x^2 + 2x$ dư $25x + 4$. Tính $f(2019)$? **ĐS: 41142713596**

Hướng dẫn:

Giả sử:

$$f(x) = (x^2 + 1).(ax+b) + 6 - 4x \quad (1)$$

$$f(x) = (x^2 + 2x).(mx+n) + 25x + 4 \quad (2)$$

$$\text{Từ (2) ta suy ra : } f(0) = 4 ; f(-2) = -46.$$

Thay vào 1 ta được hệ phương trình 2 ẩn a, b

Bài 5: Hai số hữu tỉ a, b thỏa mãn đẳng thức: $\frac{11}{2\sqrt{7}+3\sqrt{5}} + \frac{23}{4\sqrt{7}+3\sqrt{5}} = a\sqrt{7} + b\sqrt{5}$. Tính $\frac{a}{b}$

$$\frac{11}{2\sqrt{7}+3\sqrt{5}} + \frac{23}{4\sqrt{7}+3\sqrt{5}} = a\sqrt{7} + b\sqrt{5} \text{ trục căn thức và thu gọn 2 vế ta được:}$$

$$-90\sqrt{7} - 1038\sqrt{5} = -1139a\sqrt{7} - 1139b\sqrt{5}$$

$$\text{Đồng nhất 2 vế ta được: } \begin{cases} -1139a = -90 \\ -1139b = -1038 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{90}{1139} \\ b = \frac{1038}{1139} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{15}{173}$$

Bài 7: Tìm số tự nhiên n biết 102474749131^n có 365056 ước số.

ĐS: n=15

Phân tích 102474749131 ra thừa số nguyên tố ta được

(Tham khảo cách phân tích ở bài 2/đề 8)

$$102474749131 = 19^2 \cdot 29^3 \cdot 103 \cdot 113 \Rightarrow 102474749131^n = 19^{2n} \cdot 29^{3n} \cdot 103^n \cdot 113^n$$

Số các ước tự nhiên của 102474749131^n là: $(2n+1)(3n+1)(n+1)(n+1)$

$$\text{Ta có: } (2n+1)(3n+1)(n+1)(n+1) = 365056$$

Bài 8: Tìm số tự nhiên X lớn nhất có 9 chữ số biết X chia cho 13 dư 5, chia cho 37 dư 23 và chia cho 23 dư 18.

ĐS: X=999999837

(Xem thêm cách giải bài 8 trang 11)

$$\text{-Ta có: } x = 13k + 5 \Rightarrow 13k + 5 - 23 = 13k - 18 : 37 \Rightarrow 13k - 18 = 37m \Leftrightarrow 13k = 37m + 18 \Rightarrow 37m + 18 : 13 \Leftrightarrow -2m + 5 : 13 \Rightarrow m = -4.$$

$$\text{Thay lên trên ta suy ra: } k = -10 \equiv 27 \pmod{37}$$

$$\Rightarrow x = 13k + 5 = 13 \cdot 27 + 5 = 356$$

$$\text{Số cần tìm có dạng: } \text{BCNN}(13; 37) \cdot a + 356 = 481a + 356$$

$$\text{-Vì số } (481a + 356) \text{ chia 23 dư 18 nên: } 481a + 356 - 18 = 481a + 338 : 23$$

$$\Rightarrow 21a + 16 : 23 \Rightarrow 21a + 16 = 23b \Rightarrow 21a = 23b - 16 : 21$$

$$\Rightarrow 2b + 5 : 21 \Rightarrow b = 8. \text{ Thay ngược lên tìm a ta suy ra } a = 8$$

$$\Rightarrow 481a + 356 = 4204$$

$$\Rightarrow \text{Số cần tìm có dạng: } \text{BCNN}(13; 37; 23) \cdot y + 4204 = 11063y + 4204$$

$$\text{-Số lớn nhất có 9 chữ số nên: } y = \left\lfloor \frac{999999999 - 4204}{11063} \right\rfloor = 90391$$

$$\Rightarrow \text{Số cần tìm là: } 11063y + 4204 = 11063 \cdot 90391 + 4204 = 999999837$$

HƯỚNG DẪN ĐỀ 11

Bài 6. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất mà n^3 bắt đầu bởi số 10 và kết thúc bằng số 43 ($n^3 = 10****43$).

Hướng dẫn:

Vì n^3 tận cùng là 43 nên n phải có tận cùng là 7

Vì 2 chữ số đầu tiên n^3 là 10 nên 2 chữ số đầu tiên của n là 100

Bài 8. Tìm tất cả cặp số nguyên x y, thỏa $5x^2 + 5y^2 + 2x + 6y = 3794$

Cách 1:

$$5x^2 + 5y^2 + 2x + 6y = 3794 \Leftrightarrow 5x^2 + 2x + 5y^2 + 6y - 3794 = 0$$

Xem đây là phương trình bậc 2 ẩn x ta có:

$$\Delta = -100y^2 - 120y + 75884$$

$$\text{Để phương trình có nghiệm thì } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow -28 \leq y \leq 26$$

Biến đổi phương trình ban đầu:

$$5x^2 + 5y^2 + 2x + 6y = 3794 \Leftrightarrow 25x^2 + 25y^2 + 10x + 12y = 18970$$

$$\Leftrightarrow (5x+1)^2 = 18971 - 25y^2 - 12y \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{18971 - 25y^2 - 12y} - 1}{5} \\ x = \frac{-\sqrt{18971 - 25y^2 - 12y} - 1}{5} \end{cases}$$

Lập công thức cho y chạy từ -28 đến 26 để thay vào 2 biểu thức trên; quan sát kết quả cho giá trị nguyên thì ghi nhận lại. Cuối cùng ta được các nghiệm nguyên của phương trình là: (27; -5); (21; 17); (-13; -25)

HƯỚNG DẪN ĐỀ 11

Bài 9. Cho tam giác ABC có 3 đường trung tuyến $AM = 4,3$; $BN = 2,7$; $CP = 3,9$ và G là trọng tâm. Tính (chính xác đến 2 chữ số thập phân):

- Độ dài các cạnh AB, AC của tam giác ABC .
- Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác BGC .

Bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác MNP .

Hướng dẫn:

Sử dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến cho 3 trung tuyến ta được hệ 3 ẩn là 3 cạnh của tam giác. Giải hệ theo chương trình của máy ta được kết quả